



## TEMPIAMŪJŲ GELŽBETONINIŲ ELEMENTŲ DISKREČIŲJŲ PLYŠIŲ MODELIO ANALIZĖ

Donatas Salys<sup>1</sup>, Gintaris Kaklauskas<sup>2</sup>, Edgaras Timinskas<sup>3</sup>, Viktor Gribniak<sup>4</sup>,  
Darius Ulbinas<sup>5</sup>, Eugenijus Gudonis<sup>6</sup>

*Vilniaus Gedimino technikos universitetas, Saulėtekio al. 11, LT-10223 Vilnius, Lietuva*

*El. paštas: <sup>1</sup>donatas.salys@vgtu.lt; bridge@vgtu.lt; <sup>2</sup>gintaris.kaklauskas@vgtu.lt; <sup>3</sup>edgati@gmail.com;  
bridge@vgtu.lt; <sup>4</sup>Viktor.Gribniak@vgtu.lt; <sup>5</sup>Darius.Ulbinas@vgtu.lt; <sup>6</sup>Eugenijus.Gudonis@vgtu.lt*

*Įteikta 2010 06 15; priimta 2010 09 16*

**Santrauka.** Šiame straipsnyje aptariamas gelžbetoninių elementų pleišėjimo diskretusis modelis. Pastaraisiais metais pleišėjimo diskretieji modeliai tobulinami ypač intensyviai tikintis, kad būtent šis modeliavimo būdas ateityje galėtų tapti universalia gelžbetoninių elementų projektavimo priemone. Analizuojamas modelis pagrįstas šlyties įtempių armatūros ir betono sąlyčio zonoje bei armatūros slinkties deformacijų priklausomybėmis. Taikant šį modelį galima apskaičiuoti plyšio plotį ir nustatyti deformacijų bei įtempių pasiskirstymą supleišėjusiam betone. Straipsnyje atliktas eksperimentinių tempiamųjų gelžbetoninių elementų modeliavimas bei parodyta, kad literatūroje rekomenduojamos šlyties įtempių sąlyčio zonoje ir armatūros slinkties idealizacijos gali būti netikslios.

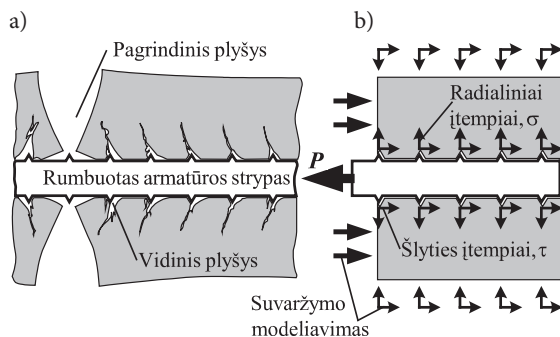
**Reikšminiai žodžiai:** gelžbetonis, diskretusis modelis, šlyties įtempiai, armatūros slinktis, deformacijos, pleišėjimas, tempiamieji elementai.

### 1. Įvadas

Kuriant modernias statybines konstrukcijas, inovatyvūs sprendimai įmanomi tik tobulinant skaičiavimo metodus bei tikslinant fizinius medžiagų modelius, siekiant užtikrinti šių konstrukcijų ilgaamžiškumą, patikimumą ir saugą. Nepaisant to, kad gelžbetoninių konstrukcijų elgsena tiriama jau daugiau nei septynis dešimtmečius, pasaulyje nėra bendrų ir tarpusavyje suderintų deformacijų bei plyšio pločio skaičiavimo teorijų. Tai, kad skirtingose šalyse (JAV, Rusijoje, Australijoje, Japonijoje ir Europos šalyse) taikomi skirtingi projektavimo normų metodai, rodo nagrinėjamos mokslinės problemos sudėtingumą. Šio straipsnio autorių atlikti statistiniai tyrimai parodė, kad gelžbetoninių elementų deformacijų paklaidos (variacijos koeficientas) pagal įvairius skaičiavimo metodus buvo tarp 20 ir 37 %, o atskirų įlinkių paklaidos viršijo 200 % (Kaklauskas 2001, 2004; Gribniak *et al.* 2004). Plyšio pločio skaičiavimo paklaidos yra gerokai didesnės. Tokias dideles paklaidas lemia labai sudėtinga gelžbetonio elgsena: skirtingos betono ir armatūros fizikinės bei mechaninės savybės, betono

pleišėjimas, susitraukimas bei valkšnumas, armatūros strypų išdėstymas ir kt.

Iš minėtųjų veiksnių didžiausią įtaką gelžbetoninių elementų modeliavimo rezultatams turi betono pleišėjimo bei armatūros ir betono sąveikos idealizavimas. Gelžbetoninio tempiamojo elemento pleišėjimo pobūdis pavaizduotas 1 pav., a. Pirmiausia atsiranda pagrindiniai normaliniai plyšiai, kertantys visą skerspjūvį. Atsiradus šiems plyšiams, gelžbetoninių elementų deformacijos gali padidėti keletą kartų. Plyšiuose ir gretimuose pjūviuose armatūra betone praslysta, o rumbelių vietose betone atsiranda lokalūs plyšiai. Praslydus armatūrai, sąlyčio zonoje atsiranda šlyties įtempiai (1 pav., b), kurie perduodami betonui. Ruožuose tarp plyšių betonas perima tempimo įtempius, o tai lemia gelžbetoninio elemento standumo padidėjimą. Šis reiškinys vadinamas gelžbetoninio elemento tempimo sustandėjimu. Gelžbetoninio elemento modeliavimą apsunkina ir tai, kad didieji plyšiai yra diskretūs, t. y. nutolę tam tikru atstumu, kintančiu priklausomai nuo įvairių veiksnių (elemento skerspjūvio formos, tempiamosios armatūros kiekio, strypų skersmens bei jų paviršiaus).



**1 pav.** Plyšių atsiradimas bei betono ir armatūros sąveikos modelis

**Fig. 1.** The formation of cracks and idealized bond behaviour

Yra pasiūlyta daug gelžbetoninių elementų modeliavimo būdų, kurie skiriasi ne tik gaunamais skaičiavimo rezultatais, bet ir savo sudėtingumu. Skaitiniuose algoritmuose dažniausiai taikomos trys modeliavimo koncepcijos:

- Diskrečių plyšių modeliai, pagrįsti šlyties įtempių sąlyčio zonoje ir armatūros slinkties priklausomybėmis. Tokie modeliai realiausiai atspindi armuoto betono pleišėjimo procesą bei deformacijų būvį. Šie modeliai leidžia apskaičiuoti plyšio plotį bei įvertinti deformacijų ir įtempių pasiskirstymą betone tarp plyšių. Diskrečių plyšių modelius kūrė Ngo, Scordelis (1967), Nilson (1972), Floegl, Mang (1982), Feenstra, Borst de (1995), Foster, Marti (2003), Borosnyói, Balázs (2005), Vollum *et al.* (2008), Wu, Gilbert (2009) ir daugelis kitų mokslininkų.
- Vidutinių plyšių modeliai pagrįsti sustandėjimo kitimu priklausomai nuo elemento deformacijų. Tai plačiausiai taikoma modeliavimo kryptis, nes skaitinė jos realizacija paprasčiausia. Gelžbetoninio elemento tempimo sustandėjimas modeliuojamas tempiamojo betono įtempių ir deformacijų priklausomybe, pritaikyta visoje tempiamojoje zonoje arba vadinamojoje efektyvioje zonoje, esančioje prie tempiamosios armatūros. Tempimo betono dalis, esanti už efektyviosios zonos, gali būti modeliuojama taikant irimo mechanikos modelius. Šiuos modelius kūrė Suidan, Schnobrich (1973), Vecchio, Collins (1986), Cervenka *et al.* (1990), Scanlon, Bischoff (2008). Šio straipsnio autoriai (Kaklauskas 2001, 2004; Kaklauskas *et al.* 2009; Gribniak 2009) taip pat gavo naujų rezultatų, minėtinų kuriant modelius.
- Modeliai, kuriuose tempimo sustandėjimo efektas įvertinamas armatūros įtempių ir

deformacijų priklausomybėmis. Šiuos modelius kūrė Gilbert, Warner (1978), Cervenka (1985), Hofstetter, Mang (1995). Tai gana retai taikomi modeliai, tačiau autorių tyrimai parodė, kad toks modeliavimas gali atskleisti labai įdomius armatūros ir betono sąlyčio zonos elgsenos ypatumus (Salys *et al.* 2009).

Pastaraisiais metais pleišėjimo diskretieji modeliai tobulinami ypač intensyviai tikintis, kad būtent šis modeliavimo būdas ateityje galėtų tapti universalia gelžbetoninių elementų projektavimo priemone. Šiame straipsnyje analizuojamas diskrečių plyšių modeliavimo būdas, patikrinamas plačiausiai pasaulyje taikomo sukibimo modelio CEB-FIP (1991) adekvatumas, skaičiuojant tempiamųjų gelžbetoninių elementų deformacijas. Straipsnyje analizuojamas nesudėtingas šlyties įtempių ir slinkties modelis, kuriame šlyties įtempiai yra nuolatiniai ir nepriklausomi nuo slinkties. Pažymėtina, kad šio modelio autorių (Eligehausen ir kt.) išbandyti elementai buvo tankiai armuoti skersine armatūra. Wu, Gilbert (2009) pastebėjo, kad CEB-FIP modelis nėra tinkamas apskaičiuoti tempiamųjų gelžbetoninių elementų deformacijas. Tokią išvadą jie padarė, atlikę baigtinių elementų analizę. Šiame darbe atliekama analogiška analizė, taikant supaprastintą diskrečių plyšių modelio realizaciją, paremtą plokščiųjų pjūvių hipoteze. Šios analizės rezultatai lems autorių tolesnių tyrimų kryptį.

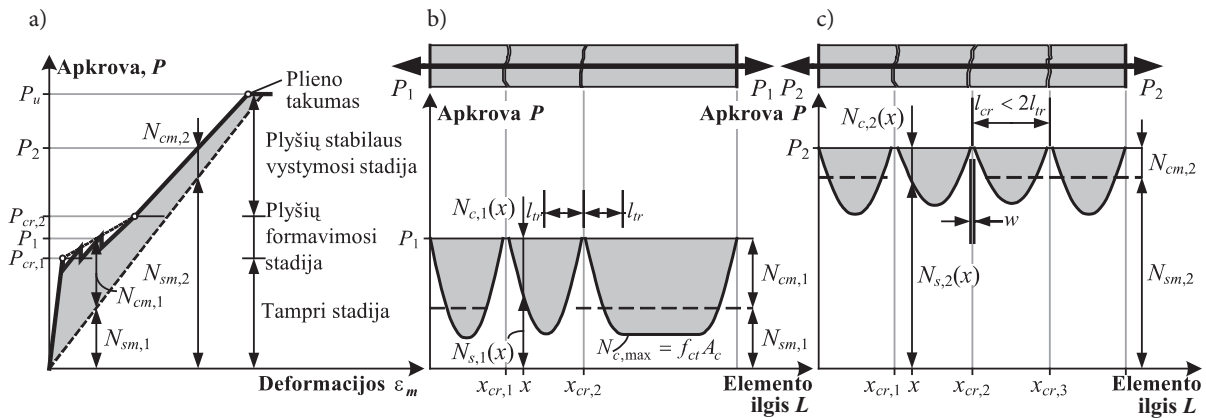
## 2. Gelžbetoninio elemento pleišėjimo modeliavimas

Tempimo gelžbetoninio elemento deformavimo būvis gali būti suskirstytas į tris stadijas, kurios parodytos 2 pav., a. Pirmojoje stadijoje (iki pleišėjimo apkrovos  $P_{cr,1}$ ) elementas deformuojasi tampriai. Antrojoje stadijoje, vadinamoje plyšių vystymosi stadijoje (iki  $P_{cr,2}$ ), atsiranda ir vystosi *pagrindiniai* plyšiai (1 pav.). Kai pleišėjimo procesas stabilizuojasi, prasideda trečioji stadija, kuri baigiasi armatūros tekėjimu, t. y. elemento irimu ( $P_u$ ). Kiekviename apkrovimo etape išorinė apkrova sukelia įrąžas elemente, kurias perima armatūra ir betonas:

$$P = N_{sm} + N_{cm} \tag{1}$$

čia  $N_{sm}$  ir  $N_{cm}$  – vidutinės armatūros ir betono įrąžas.

Dauguma gelžbetoninių elementų deformacijų skaičiavimo metodų grindžiami vidutinių įrąžų ( $N_{sm}$  ir  $N_{cm}$ ) koncepcija, tačiau gelžbetoninio elemento pleišėjimas – diskretus procesas, todėl realus įtempimų pasiskirstymas elemento ilgiu negali būti sumodeliuotas tokiais metodais. Kaip parodyta 2 pav., b, atsiradus plyšiams,



2 pav. Tempiamojo elemento apkrovos ir deformavimo stadijos

Fig. 2. The stages of load-deformation behaviour of a tensile member

betono ir armatūros atlaikomos įrašos kinta elemento ilgyje (įrašos betone parodytos pilka spalva). Kiekviename pjūvyje  $x$  gali būti užrašyta pusiausvyros sąlyga:

$$P = N_s(x) + N_c(x), \quad 0 < x \leq L, \quad (2)$$

čia  $L$  – gelžbetoninio elemento ilgis.

Pagrindinio plyšio atsiradimo vietoje betonas negali atlaikyti tempimo įtempių ir visą įrašą perima armatūra. Plyšyje ir gretimuose pjūviuose armatūra pralysta betono atžvilgiu, todėl jų sąlyčio zonoje atsiranda šlyties įtempiai ir betonas tarp plyšių įtraukiamas į bendrą darbą. Betone atsiranda tempimo įtempiai, kurie auga tolstant nuo plyšio ir pasiekia maksimalią reikšmę, neviršijančią betono tempiamojo stiprio  $f_{cr}$ . Atstumas tarp plyšių  $l_{cr}$  turi tenkinti sąlygą:

$$l_{tr} \leq l_{cr} < 2 \cdot l_{tr}, \quad (3)$$

čia  $l_{tr}$  – šlyties įtempių perdavimo zonos ilgis.

Atlikta nemažai tyrimų, skirtų nustatyti  $l_{cr}$  reikšmę. Skirtingų autorių pasiūlytos atstumo tarp plyšių priklausomybės nuo  $l_{tr}$  išraiškos pateiktos 1 lentelėje. Joje pateiktas vidutinis atstumas tarp plyšių  $l_{cr,m}$ , naudojamas gelžbetoninių elementų vidutinėms deformacijoms ir plyšių pločiams nustatyti. Maksimali reikšmė  $l_{cr,max}$  taikoma maksimaliam plyšio pločiui  $w$  (2 pav., c) apskaičiuoti. Šiame tyrime taikomos CEB-FIP (1991) rekomenduojamos reikšmės, parodytos 1 lentelės pilkai pažymėtuose langeliuose.

Kaip minėta, gelžbetoninių elementų elgseną tiksliausiai išreiškia diskrečiųjų plyšių modelis. Jis grindžiamas šlyties įtempių sąlyčio zonoje ir armatūros slinkties diagramomis. Pasaulio mokslininkai pasiūlė daug tokių priklausomybių. Modelių sudėtingumą dažniausiai lemia naudojamų fizikinių parametrų skaičius. Toliau aptariamos dvi Europoje plačiausiai naudojamos diagramos.

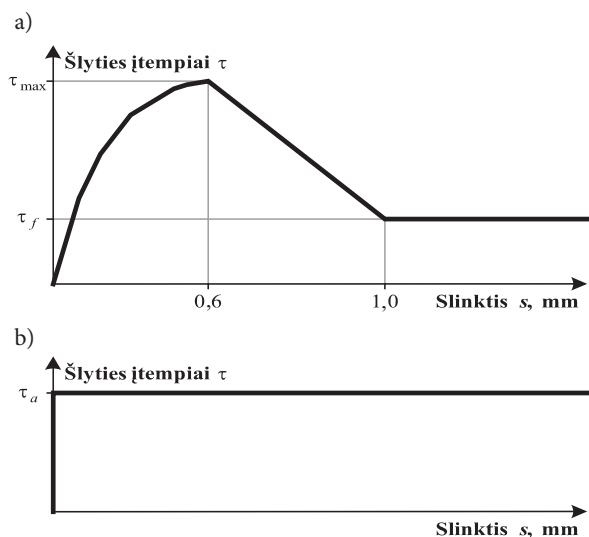
Pirma iš analizuojamųjų priklausomybių buvo pasiūlyta CEB-FIP (1991). Šis modelis įvertina betono gniuždomojo stiprio, armatūros skersmens bei jos tipo įtaką sąlyčio zonos elgsenai. Be to, atsižvelgiama į betonavimo kokybę bei kietėjimo sąlygas. Normalias sąlygas atitinkantis modelis pateiktas 3 pav., a.

Kadangi realiose konstrukcijose slinktis dažniausiai neviršija 0,6 mm, atliktame tyrime buvo apsiribota diagramos (3 pav., a) kylančiąja dalimi. Šiame intervale šlyties įtempius galima nustatyti pagal formulę:

$$\tau = \tau_{max}(s/0,6)^{0,4}, \quad 0 < s \leq 0,6 \text{ mm}, \quad (4)$$

čia:  $s$  – armatūros strypo slinktis, mm;  $\tau_{max}$  – šlyties įtempiai, nustatomi pagal betono cilindrinį stiprį  $f_{cyl}$ :

$$\tau_{max} = 2,5\sqrt{f_{cyl}}. \quad (5)$$



3 pav. Įtempių ir slinkties diagramos: a – CEB-FIP (1991); b – Alvarez (1998)

Fig. 3. Bond-slip relationships

**1 lentelė.** Išraiškos atstumui tarp plyšių nustatyti

**Table 1.** Relationships for deriving the distance between crack

Atstumas	Išraiška	Autorius
Vidutinis	$l_{cr,m} = 1.3 \cdot l_{tr}$	Bigaj (1999)
	$l_{cr,m} = 1.33 \cdot l_{tr}$	Park, Paulay (1975); Rizkalla, Hwang (1984)
	$l_{cr,m} = 1.4 \cdot l_{tr}$	Janovic, Kupfer (1986)
	$l_{cr,m} = 1.5 \cdot l_{tr}$	Noakowski (1985); CEB-FIP (1991); Bruggeling (1991)
Maksimalus	$l_{cr,max} = 2 \cdot l_{tr}$	Park, Paulay (1975); Rizkalla, Hwang (1984); CEB-FIP (1991); Alvarez (1998); Bigaj (1999)

Antra iš analizuojamųjų priklausomybių buvo pasirinkta dėl jos paprastumo. Ši priklausomybė parodyta 3 pav., b. Pažymėtina, kad šis modelis įvertina tik betono tempiamąjį stiprį  $f_{cr}$ . Ribiniai šlyties įtempiai  $\tau_a$  nustatomi pagal Alvarez (1998) pateiktą išraišką:

$$\tau_a = 2f_{ct} \approx 0,6f_{cyl}^{2/3}. \quad (6)$$

### 3. Diskrečiųjų plyšių modelio algoritmas

Šiame skyriuje pateikiamas diskrečiųjų plyšių modeliavimo algoritmas. Tiriamos tempiamųjų gelžbetoninių elementų deformacijos, taikant pirmiau aptartus armatūros ir betono sukibimo modelius. Modeliuojama iki ribinės apkrovos:

$$P_u = f_s A_s, \quad (7)$$

čia  $f_s$  ir  $A_s$  – armatūros stipris ir jos skerspjūvio plotas.

Siekiant palengvinti modeliavimą, taikoma prielaida, kad visi pagrindiniai plyšiai formuojasi vienu metu, pasiekus pleišėjimo apkrovą  $P_{cr,1}$  (2 pav., a):

$$P_{cr} = P_{cr,1} = P_{cr,2} = f_{ct} A_c (1 + n\rho), \quad (8)$$

$$n = E_s / E_c, \quad \rho = A_s / A_c,$$

čia:  $A_c$  – betono skerspjūvio plotas;  $E_c$  ir  $E_s$  – betono ir armatūros tamprumo moduliai.

Idealizuota apkrovos ir deformacijos diagrama, taikoma analizuojant, parodyta 4 pav. Nagrinėjama gelžbetoninio elemento dalis dalijama į segmentus, kiekvieno iš jų ilgis yra  $\Delta l_i$  (5 pav.). Kiekvienoje apkrovimo pakopoje galioja dvi pusiausvyros sąlygos. Pirmoji iš jų užrašoma  $i$ -tajam armatūros strypo segmentui:

$$N_{s,i} - N_{s,i-1} - \tau_i (\pi d \Delta l_i) = 0, \quad (9)$$

čia:  $d$  – armatūros strypo skersmuo;  $\pi d \Delta l_i$  – strypo  $i$ -tojo segmento paviršiaus plotas. Antroji pusiausvyros sąlyga yra analogiška (2) formulėi:

$$N_{s,i} + N_{c,i} - P = 0. \quad (10)$$

Skaičiuojama dviem etapais. Pirmajame etape apkrovai  $P_{cr}$  nustatomas šlyties įtempių perdavimo ilgis  $l_{tr}$ . Antrajame etape atliekama gelžbetoninio elemento vidutinių deformacijų arba maksimalaus plyšio pločio analizė, taikant apskaičiuotąją  $l_{tr}$  ir atitinkamas atstumo tarp plyšių išraiškas, pateiktas 1 lentelėje. Toliau aptariamas kiekvienas skaičiavimo etapas.

Kaip minėta, ilgis  $l_{tr}$  nustatomas apkrovai  $P_{cr}$  (žr. (8) formulę). Tempimo įtempiai betone auga tolstant nuo plyšio ir atstumu  $l_{tr}$  pasiekia maksimalią reikšmę. Maksimalūs įtempiai pasiekiami, kai deformacijos betone  $\epsilon_c$  ir armatūroje  $\epsilon_s$  sutampa, t. y. galioja sąlyga:

$$\epsilon_c = \epsilon_s. \quad (11)$$

Armatūros ir betono deformacijos plyšyje ir „1“ pjūvyje, kuriame galioja (11) sąlyga (5 pav., a), nustatomos pagal šias formules:

$$\epsilon_{s,max} = \frac{P}{A_s E_s}, \quad \epsilon_{s,1} = \epsilon_{c,1} = \frac{P}{A_s E_s + A_c E_c}. \quad (12)$$

Visuose pjūviuose, pradedant nuo „2“, sprendžiama dviejų pusiausvyros lygčių – (9) ir (10) sąlygos – sistema. Skaičiuojama iteracijomis, priartėjimo būdu. Analizuojamas  $i$ -tasis segmentas ( $i \geq 2$ ):

1. Pirmajame priartėjime imama armatūros deformacija  $\epsilon_{s,i} = \epsilon_{s,i-1} + 0.1 \cdot (\epsilon_{s,max} - \epsilon_{s,i-1})$ .
2. Pagal (10) nustatoma deformacija betone:

$$\epsilon_{c,i} = \frac{P - N_{s,i}}{E_c A_c} = \frac{P - \epsilon_{s,i} E_s A_s}{E_c A_c}. \quad (13)$$

3. Skaičiuojamas armatūros segmento slinkties prieaugis  $\Delta s_i$ , atitinkantis diagramos plotą, 5 pav., a, parodytą pilka spalva:

$$\Delta s_i = \Delta l_i \left( \frac{\epsilon_{s,i} + \epsilon_{s,i-1}}{2} - \frac{\epsilon_{c,i} + \epsilon_{c,i-1}}{2} \right). \quad (14)$$

4. Nustatoma segmento slinkties atskaitos taško („1“ pjūvis, 5 pav., a) atžvilgiu:

$$s_i = s_{i-1} + \Delta s_i. \quad (15)$$

5. Priklausomai nuo naudojamo sukibimo modelio pagal (4) arba (6) formules gaunami įtempiai  $\tau_i$ .
6. Pagal (9) nustatoma armatūros deformacija:

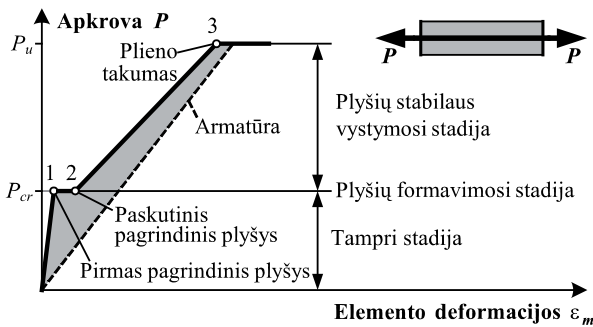
$$\epsilon_{s,i} = \tau_i \frac{\pi d \Delta l_i}{E_s A_s} + \epsilon_{s,i-1} = \tau_i \frac{4 \Delta l_i}{E_s d} + \epsilon_{s,i-1}. \quad (16)$$



7. Apskaičiuotoji armatūros deformacija lyginama su priimtąja. Jeigu jų skirtumas viršija nustatytą toleranciją, apskaičiuotoji reikšmė fiksuojama ir skaičiuoti pradeda nuo 2-ojo žingsnio su naujai apskaičiuotąja  $\varepsilon_{s,i}$  reikšme. Jeigu deformacijų skirtumo sąlyga yra tenkinama, tikslinamas ilgis

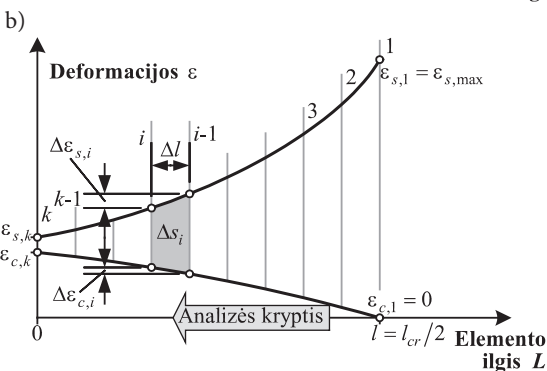
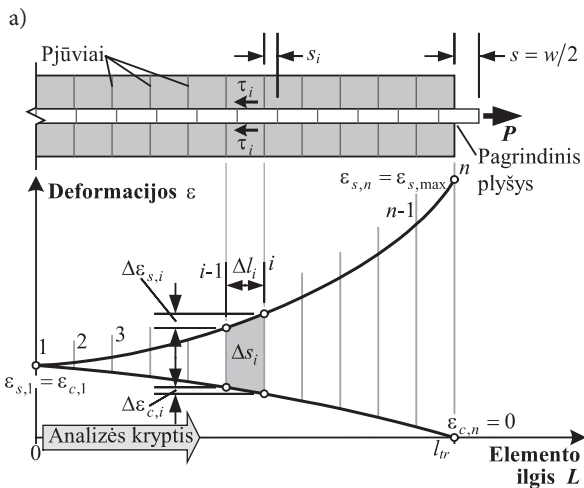
$$l_{tr,i} = l_{tr,i-1} + \Delta l_i \quad (17)$$

ir skaičiuoti pradeda nuo 1-ojo žingsnio kitame segmente.



4 pav. Idealizuota apkrovos ir deformacijos diagrama

Fig. 4. The idealized loading-deformation response of RC member



5 pav. Diskrečiųjų plyšių modelis: a –  $l_{tr}$  nustatymas; b – gelžbetoninio elemento analizė

Fig. 5. Discrete crack model: a – deriving  $l_{tr}$ ; b – RC member analysis

Pirmojo etapo skaičiavimai baigiami, kai nustatyta armatūros deformacija pasiekia maksimalią reikšmę  $\varepsilon_{s,max}$ , apskaičiuotą pagal (12) formulę. Nustatytas ilgis  $l_{tr}$  naudojamas toliau skaičiuoti.

Nesupleišėjusio elemento deformacijos nustatomos pagal (12) formulę. Atsiradus plyšiui ( $P \geq P_{cr}$ ), gelžbetoninio elemento analizė atliekama pagal antrojo etapo algoritmą, pateikiamą toliau.

Priklausomai nuo atliekamos analizės (vidutinių deformacijų arba maksimalaus plyšio pločio) pagal gautąją  $l_{tr}$  ir atitinkamas formules, pateiktas 1 lentelėje, nustatomas atstumas  $l_{cr}$ . Nagrinėjama gelžbetoninio elemento dalis parodyta 5 pav., b. Ją dalijame į segmentus ( $k \approx 100$ ), kurių ilgis  $\Delta l = l/k$ . Analizė analogiška pirmajam etapui. Visuose pjūviuose sprendžiama dviejų pusiausvyros lygčių – (9) ir (10) sąlygos – sistema. Analizė pradeda nuo plyšio („1“ pjūvis 5 pav., b). Šiame pjūvyje deformacijos betone  $\varepsilon_{c,1} = 0$ , o armatūroje  $\varepsilon_{s,1} = \varepsilon_{s,max}$  (apskaičiuota pagal (12) formulę). Skaičiuojama iteracijomis, priartėjimo būdu. Pirmu priartėjimu nustatyta armatūros slinkties plyšyje  $s = 0,6$  mm. Kaip parodyta 5 pav., b,  $s_1 = s$ . Analizuojamas  $i$ -tasis segmentas ( $i \geq 1$ ):

1. Priklausomai nuo priimtos šlyties diagramos, pagal (4) arba (6) formules skaičiuojami įtempiai  $\tau_i$ .
2. Pagal (9) nustatoma armatūros deformacija:

$$\varepsilon_{s,i} = \varepsilon_{s,i-1} - \tau_i \frac{\pi d \Delta l_i}{E_s A_s} \quad (18)$$

3. Pagal (13) gaunama deformacija betone.
4. Pagal (14) skaičiuojamas armatūros segmento slinkties prieaugis  $\Delta s_i$  (diagramos plotas, 5 pav., b, parodytas pilka spalva).
5. Nustatoma kito segmento slinkties:

$$s_{i+1} = s_i - \Delta s_i \quad (19)$$

ir skaičiuoti pradeda nuo 1-ojo žingsnio kitame segmente. Skaičiavimai kartojami, kol nustatoma  $k$ -tojo segmento slinkties.

6. Nustatoma armatūros slinkties plyšyje:

$$s = \sum_{i=1}^k \Delta s_i \quad (20)$$

7. Lyginama apskaičiuotoji armatūros slinkties su priimtąja. Jeigu jų skirtumas viršija nustatytą toleranciją, apskaičiuotoji  $s$  reikšmė fiksuojama ir skaičiavimai kartojami nuo 1-ojo žingsnio naudojant naująją slinkties reikšmę. Jeigu slinkčių skirtumo sąlyga patenkinama, antrojo etapo skaičiavimai baigiami ir nustatomas plyšio plotis  $w$  bei vidutinės elemento deformacijos  $\varepsilon_m$ :

$$w = 2s, \quad \varepsilon_m = \frac{\Delta l}{l} \sum_{i=1}^k \varepsilon_{s,i} = 2 \frac{\Delta l}{l_{cr}} \sum_{i=1}^k \varepsilon_{s,i} \quad (21)$$

Kitame skyriuje aptartoji pleišėjimo modeliavimo metodika taikoma eksperimentinių gelžbetoninių elementų deformavimo analizėje. Taip pat tiriamas šlyties diagramų, pateiktų 2-jame skyriuje, adekvatumas.

#### 4. Tempiamųjų gelžbetoninių elementų deformacijų analizė

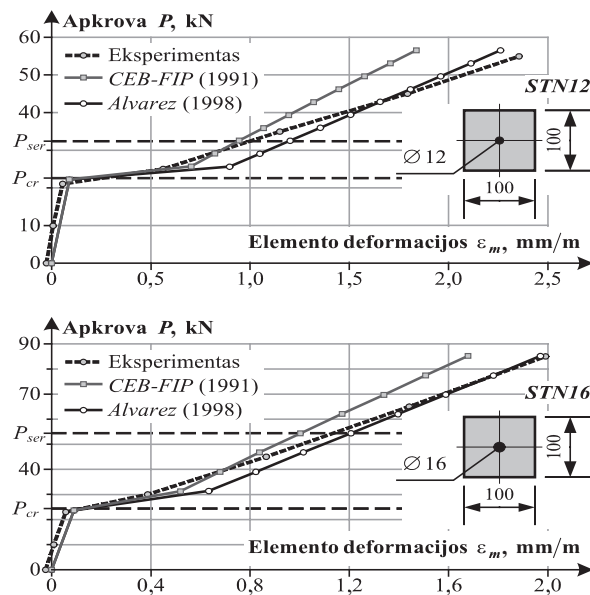
Šiame skyriuje vidutinių deformacijų skaičiavimo rezultatai lyginami su eksperimentiniais matavimais. Analizuojamas CEB-FIP (1991) ir Alvarez (1998) pasiūlytųjų šlyties diagramų adekvatumas. Analizėje naudoti du gelžbetoniniai tempiamieji elementai STN12 ir STN16, kurių bandymo rezultatus paskelbė Wu ir Gilbert (2008).

Eksperimentiniai 100×100×1100 mm elementai buvo išbandyti ašine tempimo jėga, pridėta prie armatūros strypų galų. Kaip parodyta 6 pav., bandiniai buvo centriškai armuoti. Jų armavimo koeficientai – 1,11 % ir 2,04 %. Bandymo metu abiejų bandinių mechaninės charakteristikos (32 dienos po betonavimo) buvo vienodos. Betono ir armatūros tamprumo moduliai buvo atitinkamai 22,4 ir 200 GPa. Betono tempiamasis stipris buvo 2,04 MPa. Analizuojami elementai kietėjo drėgnoje aplinkoje, todėl praktiškai nesitraukė (susitraukimo deformacija –  $28 \times 10^{-6}$ ).

Tempiamųjų elementų vidutinės deformacijos pateiktos 6 pav. Pažymėtina, kad pleišėjimo apkrovos nustatytos eksperimentiškai (21,1 ir 23,1 kN, atitinkamai, STN12 ir STN16 elementams) ir apskaičiuotos pagal (8) formulę (22,6 ir 24,4 kN, atitinkamai), skiriasi nedaug. Maksimalus skirtumas sudaro vos 7 %. Šį skirtumą galima paaiškinti tuo, kad pasirinktame pleišėjimo modelyje susitraukimas neįvertinamas.

Pabrėžtina, kad CEB-FIP (1991) šlyties modelio taikymas standina sumodeliuoto gelžbetoninio elemento elgseną. Apskaičiuotos supleišėjusių elementų deformacijos beveik visais apkrovimo lygiais pastebimai atsilieka nuo išmatuotų eksperimentiškai. Alvarez (1998) pasiūlytas modelis tinkamai aprašo eksperimentinio elemento deformavimo būvį, t. y. apskaičiuotos deformacijos faktiškai visuose apkrovimo etapuose viršija išmatuotas. Tai priimtina, nes tokiu atveju padidinama suprojektuoto elemento atsarga.

Statybinės konstrukcijos projektuojamos taip, kad galėtų saugiai atlaikyti norminę apkrovą  $P_{ser} \approx 0,55Pu$ , todėl svarbu išanalizuoti modelių tikslumą būtent šiai apkrovai. Skaičiavimo tikslumas įvertinamas paklaida:



6 pav. Apkrovos ir armatūros vidutinių deformacijų diagramos (Wu, Gilbert 2008)

Fig. 6. Load-average deformation diagrams

$$\delta_\varepsilon = \frac{\varepsilon_{m,obs} - \varepsilon_{m,calc}}{\varepsilon_{m,obs}} \times 100 \%, \quad (22)$$

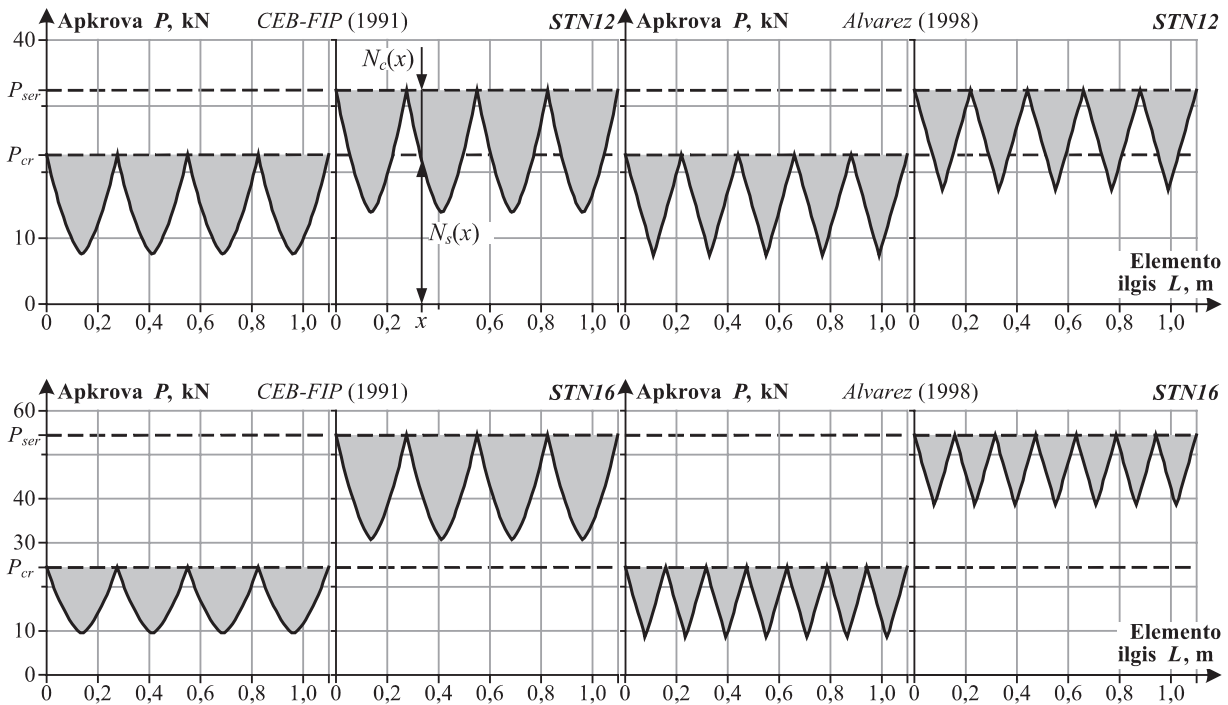
čia  $\varepsilon_{m,obs}$  ir  $\varepsilon_{m,calc}$  – atitinkamai eksperimentiškai nustatytos ir apskaičiuotos vidutinės elemento deformacijos.

Neigiama paklaida  $\delta_\varepsilon$  rodo, kad apskaičiuotos deformacijos viršija eksperimentines. Analizės rezultatai pateikti 2 lentelėje. Didžiausia paklaida gauta mažai armuotame elemente STN12, taikant Alvarez (1998) slinkties modelį. Toks skirtumas atsirado dėl modeliavimo prielaidos, kad visi pagrindiniai plyšiai atsiranda vienu metu (4 ir 6 pav., a). Kita vertus, ši prielaida leidžia užtikrinti standumo atsargą.

2 lentelė. Deformacijų, apskaičiuotų esant  $P_{ser}$ , paklaidos  $\delta_\varepsilon$   
Table 2. Relative errors  $\delta_\varepsilon$  of deformations predicted at  $P_{se}$

Elementas	Šlyties modelis	
	CEB-FIP (1991)	Alvarez (1998)
STN12	5,6 %	-20,1 %
STN16	11,7 %	-6,2 %

Analogiškai 2 pav., 7 pav. pateiktas apskaičiuotųjų įrąžų kitimas elemento ilgyje. Analizuojamos dvi apkrovimo stadijos: 1) pleišėjimo; 2) norminės apkrovos. 7 pav. pilka spalva parodyta įrąžos dalis, kurią perima betonas. Svarbu pažymėti tai, kad pagal CEB-FIP (1991) sumodeliuotos įrąžos betone auga didėjant apkrovai. Autorių patirtis rodo, kad tai neatitinka tikrovės. Kaip parodyta 2 pav., augant apkrovai betono atlaikoma įrąža turi mažėti. Šiuo atžvilgiu Alvarez (1998)



7 pav. Modeliavimo rezultatai: armatūros ir betono įrąžų kitimas elemento ilgyje

Fig. 7. The results of analysis: variation on internal forces in reinforcement and concrete

modelis, imant pastoviąją šlyties įtempių diagramą (3 pav., b), atrodo priimtinesnis.

Pabrėžtina, kad 7 pav. parodytos diagramos buvo sudarytos atliekant gelžbetoninio elemento vidutinių deformacijų analizę, t. y. imant vidutinį atstumą tarp plyšių  $l_{cr,m} = 1,5l_{tr}$ . Būtų nekorektiška jas taikyti maksimalaus plyšio pločiui nustatyti. Kita vertus, iš sąlygos  $l_{cr,m} = 1,5l_{tr}$  galima nustatyti vidutinį elemento plyšių skaičių. Eksperimento autoriai Wu ir Gilbert (2008) parodė, kad kiekviename iš elementų susiformavo po 5 plyšius. Taikant CEB-FIP modelį, šis skaičius yra 3. Taikant Alvarez modelį, gauti 4 ir 6 plyšiai, atitinkamai elementams STN12 ir STN16.

Apibendrinus analizės rezultatus, galima teigti, kad CEB-FIP slinkties idealizacija, taikant pasirinktąjį diskrečiųjų plyšių modelį, nėra tinkama. Priimtina alternatyva yra Alvarez pasiūlyta šlyties įtempių ir slinkties diagrama, tačiau diskrečiųjų plyšių modelio parametrams patikslinti reikalingi papildomi tyrimai.

## 5. Darbo rezultatai ir išvados

Šiame straipsnyje aptartas diskrečiųjų plyšių modelis, skirtas tempiamųjų gelžbetoninių elementų deformacijų analizei. Naudojant šį modelį buvo išanalizuotos CEB-FIP (1991) ir Alvarez (1998) pasiūlytos šlyties įtempių sąlyčio zonoje ir armatūros slinkties diagramos. Taikant Wu ir Gilbert (2008) paskelbtų tempiamųjų gelžbetoninių elementų eksperimentinius duomenis, buvo ištirtas šlyties diagramų adekvatumas.

Atliktos analizės metu nustatyta, kad literatūroje rekomenduojamos šlyties įtempių sąlyčio zonoje ir armatūros slinkties idealizacijos gali būti netikslios. Pabrėžtina, kad CEB-FIP slinkties idealizacija nėra tinkama atlikti gelžbetoninių elementų vidutinių deformacijų analizę, taikant pateiktąjį diskrečiųjų plyšių modelį. Priimtina alternatyva yra Alvarez pasiūlytas sukibimo modelis, tačiau jo parametrai turi būti tikslinami tolesniuose tyrimuose.

Autoriai ketina atlikti tolesnius eksperimentinius ir teorinius tyrimus, kuriuose bus nagrinėjama įvairių veiksnių (strypo formos, strypo skersmens, strypų išdėstymo, armavimo koeficiento, betono apsauginio sluoksnio, betono ir armatūros fizinių ir mechaninių savybių) įtaka gelžbetoninių elementų pleišetumui ir deformacijoms.

## Padėkos

Autoriai išreiškia nuoširdžią padėką Lietuvos mokslo tarybai už finansavimą, skirtą mokslo projektui MIP-126/2010. Viktor Gribniak dėkingas Lietuvos mokslo tarybai už podoktorantūros stažuotės rėmimą.

## Literatūra

Alvarez, M. 1998. *Einfluss des Verbundverhaltens auf das Verformungsvermögen von Stahlbeton (Influence of bond performance on the behavior of reinforced concrete)*. PhD dissertation, Swiss Federal Institute of Technology, Zurich. 182 p.

- Bigaj, A. J. 1999. *Structural Dependence of Rotation Capacity of Plastic Hinges in RC Beams and Slabs*. PhD dissertation, Delft University of Technology. 230 p.
- Borosnyói, A.; Balázs, L. G. 2005. Models for flexural cracking in concrete: the state of the art, *Structural Concrete* 6(2): 53–62.
- Bruggeling, A. S. G. 1991. *Structural Concrete: Theory and its Applications*. Rotterdam: Balkema. 470 p.
- CEB-FIP (Comité Euro International du Béton; Fédération Internationale de la Pré-contraint). 1991. CEB-FIB Model Code 1990: Design Code. London: Thomas Telford. 437 p.
- Cervenka, V. 1985. Constitutive model for cracked reinforced concrete, *ACI Journal Proceedings* 82(6): 877–882.
- Cervenka, V.; Pukl, R.; Eligehausen, R. 1990. Computer simulation of anchoring technique in reinforced concrete beams, in *Proc. of the Second International Conference on Computer Aided Analysis and Design of Concrete Structures*. Swansea: Pineridge Press, 1–19.
- Feenstra, P. H.; Borst de, R. 1995. A constitutive model for reinforced concrete, *ASCE Journal of Engineering Mechanics* 121(5): 587–595. doi:10.1061/(ASCE)0733-9399(1995)121:5(587)
- Floegl, H.; Mang, H. A. 1982. Tension stiffening concept based on bond slip, *ASCE Journal of Structural Engineering* 108(12): 2681–2701.
- Foster, S. J.; Marti, P. 2003. Cracked membrane model: Finite element implementation, *ASCE Journal of Structural Engineering* 129(9): 1155–1163. doi:10.1061/(ASCE)0733-9445(2003)129:9(1155)
- Gilbert, R. I.; Warner, R. F. 1978. Tension stiffening in reinforced concrete slabs, *Journal of the Structural Division* 104(12): 1885–1900.
- Gribniak, V. 2009. *Shrinkage Influence on Tension-Stiffening of Concrete Structures*. PhD dissertation, Vilnius Gediminas Technical University. Vilnius: Technika. 146 p.
- Gribniak, V.; Christiansen, M. B.; Kaklauskas, G. 2004. Comparative statistical deflection analysis of RC beams by FE software ATENA, design code methods and the Flexural model, in *Proc. of the Eighth International Conference Modern Building Materials, Structures and Techniques*. Vilnius: Technika, 462–469.
- Hofstetter, G.; Mang, H. A. 1995. *Computational Mechanics of Reinforced Concrete Structures*. Wiesbaden: Friedr. Vieweg & Son. 366 p.
- Janovic, K.; Kupfer, H. 1986. Zur Rissbildung im Stahlbeton- und Spannbetonbau (Cracking in reinforced and prestressed concrete), *Betonwerk und Fertigteil-Technik* 52(12): 815–823.
- Kaklauskas, G. 2001. *Integral Flexural Constitutive Model for Deformational Analysis of Concrete Structures*. Vilnius: Technika. 140 p.
- Kaklauskas, G. 2004. Flexural layered deformational model of reinforced concrete members, *Magazine of Concrete Research* 56(10): 575–584.
- Kaklauskas, G.; Gribniak, V.; Bacinskas, D.; Vainiūnas, P. 2009. Shrinkage influence on tension stiffening in concrete members, *Engineering Structures* 31(6): 1305–1312. doi:10.1016/j.engstruct.2008.10.007
- Ngo, D.; Scordelis, A. C. 1967. Finite element analysis of reinforced concrete beams, *ACI Journal Proceedings* 64(3): 152–163.
- Nilson, A. H. 1972. Internal measurement of bond slip, *ACI Journal Proceedings* 69(7): 439–441.
- Noakowski, P. 1985. Verbundorientierte, kontinuierliche Theorie zur Ermittlung der Rissbreite [Continuous theory to determine the crack width in reinforced concrete], *Beton- und Stahlbetonbau* 80(7): 185–190.
- Park, R.; Paulay, T. 1975. *Reinforced Concrete Structures*. New York: John Wiley & Sons. 800 p. doi:10.1002/9780470172834
- Rizkalla, S. H.; Hwang, L. S. 1984. Crack prediction for members in uniaxial tension, *ACI Journal Proceedings* 82(6): 572–579.
- Salys, D.; Kaklauskas, G.; Gribniak, V. 2009. Gelžbetoninių sijų tempiamosios zonos elgsenos modeliavimas armatūros diagrama [Modelling deformation behaviour of RC beams attributing tension-stiffening to tensile reinforcement], *Statybinės konstrukcijos ir technologijos* [Engineering Structures and technologies] 1(3): 141–147.
- Scanlon, A.; Bischoff, P. H. 2008. Shrinkage restraint and loading history effects on deflections of flexural members, *ACI Structural Journal* 105(4): 498–506.
- Suidan, M.; Schnobrich, W. C. 1973. Finite element analysis of reinforced concrete, *ASCE Journal of the Structural Division* 99(10): 2109–2122.
- Vecchio, F. J.; Collins, M. P. 1986. The modified compression field theory for reinforced concrete elements subjected to shear, *ACI Structural Journal* 83(6): 925–933.
- Vollum, R. L.; Afshar, N.; Izzuddin, B. A. 2008. Modelling short-term tension stiffening in tension members, *Magazine of Concrete Research* 60(4): 291–300. doi:10.1680/macr.2007.00125
- Wu, H. Q.; Gilbert, R. I. 2008. *An Experimental Study of Tension Stiffening in Reinforced Concrete Members under Short-Term and Long-Term Loads*. UNICIV Report No. R-449. Sydney: The University of South Wales. 32 p.
- Wu, H. Q.; Gilbert, R. I. 2009. Modeling short-term tension stiffening in reinforced concrete prisms using a continuum-based finite element model, *Engineering Structures* 31(10): 2380–2391. doi:10.1016/j.engstruct.2009.05.012



## THE ANALYSIS OF THE DISCRETE CRACKING MODEL OF REINFORCED CONCRETE TENSILE MEMBERS

D. Salys, G. Kaklauskas, E. Timinskas, V. Gribniak, D. Ulbinas, E. Gudonis

**Abstract.** Adequate modelling of reinforced concrete (RC) cracking, particularly post-cracking behaviour (tension-stiffening), as one of the major sources of nonlinearity, is the most important and difficult task for deformation analysis. Deformation behaviour of the cracked RC members is a complex process, including a wide range of effects such as different strength and deformation properties of steel and concrete, concrete cracking, tension-softening and tension-stiffening, bond slip between reinforcement and concrete etc. Even under low load, behaviour can be non-linear, which presents a challenge for calculating the deformations of RC members. When stress in concrete first reaches tensile strength at the weakest section, cracking occurs. After the formation of the first primary crack up to the final one, concrete contribution steadily decreases. At the final cracking point, the stable crack pattern has been reached. Increase in load will result in a further decrease of concrete contribution due to bond-slip causing cover-controlled cracks to develop between the primary cracks and a gradual breaking down of the bond. This process can be imagined as the formation of internal secondary cracks along the deformed bar due to bond stress transfer to sound concrete in between primary cracks. Total stresses in the cracked tensile reinforcement consisted of genuine stresses corresponding to the average strain of steel and additional stresses due to tension-stiffening. The internal forces that represent the latter stresses are called the residual and can be used for assessing the average bond behaviour of RC members. This paper investigates tension-stiffening effect in RC members. The discrete cracking model of RC member is described in the paper. The discussed approach is based on bond-slip relationship that models the bond-action between concrete and reinforcement. This approach is realistically capable of modelling cracking and determining crack widths and deformations. However, the accuracy of calculation results depends on the assumed bond stress-slip relationship. A number of recent investigations aimed at developing and modifying such models were performed intending that discrete cracking modelling technique could become a powerful tool for the analysis of reinforced concrete members. The present study is dedicated to deformation analysis of reinforced members that are subjected to pure tension and is based on the results of the experimental program reported in literature. The average deformations of such members were calculated applying the discrete cracking method using different bond stress-slip relationships and compared with test results reported in literature. It was concluded that relationship recommended by *CEB-FIP MC90* was unacceptable for the analysis performed.

**Keywords:** reinforced concrete, discrete model, shear stress, reinforcement slip, deformations, cracking, tensile members.

**Donatas SALYS** is a PhD student at the Department of Bridges and Special Structures, Vilnius Gediminas Technical University (VGTU), Lithuania. BSc (2005, Engineering Informatics) and MSc (2007, Engineering Informatics) degrees from VGTU. Research interests: mathematical modelling, nonlinear numerical analysis of reinforced concrete structures.

**Gintaris KAKLAUSKAS** is a Professor and the Head of the Department of Bridges and Special Structures at Vilnius Gediminas Technical University VGTU, Lithuania. PhD and Dr Habil (Dr. Sc.) degrees from VGTU. A recipient of Fulbright Fellowship (research work at the University of Illinois, Urbana-Champaign, 1996) and Marie Curie Fellowship (category of experienced researchers, 2002–2003). Prof. G. Kaklauskas is a member of FIB Task Group 4.1 “Serviceability Models”. Research interests: various topics of reinforced concrete, particularly constitutive modelling and numerical simulation of reinforced concrete structures.

**Edgaras TIMINSKAS** is a PhD student at the Department of Bridges and Special Structures, Vilnius Gediminas Technical University VGTU, Lithuania. BSc (2007, Construction Engineering) and MSc (2009, Construction Engineering) degrees from VGTU. Research interests: analysis of concrete structures reinforced by FRP bars.

**Viktor GRIBNIAK** is a researcher at the Department of Bridges and Special Structures, Vilnius Gediminas Technical University VGTU, Lithuania. An engineering degree, PhD (2009) from VGTU. A study visit to Polytechnico di Torino (2003). The author of numerous papers. Research interests: mathematical modelling, statistical analysis and numerical simulation of concrete structures.

**Darius ULBINAS** is a PhD student at the Department of Bridges and Special Structures, Vilnius Gediminas Technical University VGTU, Lithuania. BSc (2006, Construction Engineering) and MSc (2008, Construction Engineering) degrees from VGTU. Research interests: steel fibre reinforced concrete, analysis of steel fibre reinforced concrete structures.

**Eugenijus GUDONIS** is a MSc student at the Department of Bridges and Special Structures, Vilnius Gediminas Technical University VGTU, Lithuania. A BSc (2008, Construction Engineering) degree from VGTU. Research interests: numerical analysis of reinforced concrete structures.