ISSN 1392–1541

Geodezija ir kartografija, 2005, XXXI t., Nr. 1
Geodesy and Cartography, 2005, Vol XXXI, No 1

UDK 528.389

KOORDINAČIŲ SISTEMINGŲJŲ PAKLAIDŲ ĮTAKA ŽEMĖS PLUTOS DEFORMACIJŲ RODIKLIŲ ĮVERČIAMS

Algimantas Zakarevičius, Rūta Puzienė, Arminas Stanionis
Geodezijos ir kadastro katedra, Vilniaus Gedimino technikos universitetas,
Saulėtekio al. 11, LT-10223 Vilnius-40, Lietuva, el. paštas: gkk@ap.vtu.lt

Įteikta 2004 09 26, priimta 2005 01 03

Santrauka. Išnagrinėta sistemingųjų koordinačių paklaidų įtaka Žemės plutos deformacijų tenzoriams ir svarbiausiems deformacijų rodikliams, kai deformacijų rodikliai pagal geodezinius matavimus apskaičiuojami baigtinių elementų metodu. Gautos formulės paklaidų įtakai apskaičiuoti esant įvairiems tiesiniams sistemingųjų paklaidų kaupimosi modeliams. Teoriniai sprendimai patikrinti skaičiuojamaisiais eksperimentais.

Nustatyta, kad pastovios koordinačių paklaidos deformacijų tenzoriams ir deformacijų rodikliams įtakos neturi. Bet kokios tiesiškai nuo punktų padėties priklausančios sistemingosios koordinačių paklaidos turi įtakos deformacijų tenzorių elementų ir deformacijų rodiklių įverčiams, tačiau deformacijų pokyčiai nagrinėjamoje teritorijoje išlieka tokie patys kaip ir be sistemingųjų paklaidų.

Raktažodžiai: baigtinių elementų metodas, sistemingosios koordinačių paklaidos, didžiausias santykinis pailgėjimas, dilatacija, baigtinio elemento posūkis.

1. Įvadas

Žemės plutos horizontaliosioms ir erdvinėms deformacijoms nagrinėti pagal geodezinių matavimų rezultatus pastaruoju metu plačiau taikomi tenzorinės analizės principais pagrįsti tyrimo metodai [1–7], invariantiški koordinačių sistemoms. Invariantiškumas koordinačių sistemų atžvilgiu čia suprantamas kaip nustatytų svarbiausiųjų deformacijų (didžiausiojo ir mažiausiojo pailgėjimo, dilatacijos) reikšmių nepriklausomumas nuo koordinačių sistemų pradžios ir orientavimo. Netgi – viena koordinačių sistemos pradžia gali būti atliekant vieną matavimų ciklą, o kita – pakartotinai matuojant geodezinį tinklą. Svarbu tik, kad abiem atvejais būtų tos pačios koordinačių ašių orientavimo kryptys, nors šias kryptis galima pasirinkti laisvai. Tai yra todėl, kad įvertinant deformacijų tenzoriaus elementus, lemiamos įtakos turi ne absoliučiosios taškų koordinačių reikšmės, o taškų koordinačių skirtumai ir jų nesutapimai per pirmąjį ir vėlesnius matavimų ciklus [1–7]. Čia lemiamos reikšmės neturi netgi sistemingosios matavimų paklaidos, jei per visus matavimų ciklus jos yra tos pačios, pavyzdžiui, jei per visus ciklus matavimai atliekami tuo pačiu sistemingąją matavimų paklaidą turinčiu prietaisu. Jeigu atliekant kartotinius matavimus deformacijoms nustatyti ir jų rodikliams įvertinti matavimų rezultatams įtakos turi sistemingosios paklaidos arba per visą matavimų ciklą paklaidų kaupimosi dėsnis yra kitoks, jos turės įtakos koordinatėms, koordinačių skirtumams ir tų skirtumų, apskaičiuotų per skirtingus matavimų ciklus, nesutapimams. Kadangi deformacijų tenzoriai įvertinami pagal koordinačių skirtumus ir jų nesutapimus tarp matavimų ciklų, tokios sistemingosios matavimų paklaidos turės įtakos ir nustatytiems deformacijų parametrams. Sistemingųjų matavimo paklaidų įtakos Žemės plutos judesių rodiklių reikšmėms klausimai ištirti nepakankamai.

Šio darbo tikslas – ištirti horizontaliųjų Žemės plutos deformacijų įverčių priklausomybę nuo sistemingųjų koordinačių paklaidų.

Pasirinkta tyrimų metodika – teorinė analizė ir skaičiuojamasis eksperimentas, modeliuojant tam tikrus sistemingųjų koordinačių paklaidų dėsningumus, o deformacijas įvertinant baigtinių elementų metodu.

2. Sistemingųjų koordinačių paklaidų įtaka Žemės plutos deformacijų rodikliams

Sistemingųjų koordinačių paklaidų įtaka horizontaliųjų Žemės plutos deformacijų rodikliams nagrinėjama atvejo, kai deformacijos įvertinamos baigtinių elementų metodu pagal [1] darbe pateiktą algoritmą. Baigtiniu elementu laikomas trikampis.

Horizontaliųjų Žemės plutos deformacijų rodikliams įvertinti skaičiuojamas antrojo rango tenzorius:

$$\| T \| = \begin{Vmatrix} e_{11} & e_{12} \\ e_{21} & e_{22} \end{Vmatrix}. \tag{1}$$

Tenzoriaus (1) elementai nustatomi iš formulės

$$e_{ij} = \frac{D_{ij}}{D}. \tag{2}$$

Į (2) formulę įeinantys determinantai:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}, \tag{3}$$

$$D_{11} = \begin{vmatrix} 1 & \Delta x_1 & y_1 \\ 1 & \Delta x_2 & y_2 \\ 1 & \Delta x_3 & y_3 \end{vmatrix}, \quad (4)$$

$$D_{12} = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & \Delta x_1 \\ 1 & x_2 & \Delta x_2 \\ 1 & x_3 & \Delta x_3 \end{vmatrix}, \quad (5)$$

$$D_{21} = \begin{vmatrix} 1 & \Delta y_1 & y_1 \\ 1 & \Delta y_2 & y_2 \\ 1 & \Delta y_3 & y_3 \end{vmatrix}, \quad (6)$$

$$D_{22} = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & \Delta y_1 \\ 1 & x_2 & \Delta y_2 \\ 1 & x_3 & \Delta y_3 \end{vmatrix}, \quad (7)$$

$$\Delta x_i = x_i' - x_i,$$
$$\Delta y_i = y_i' - y_i,$$
$$i = 1,\ 2,\ 3,$$

x_i, y_i – pirmojo matavimų ciklo metu nustatytos koordinatės, x_i', y_i' – antrojo matavimų ciklo koordinatės.

Pagrindiniai deformacijų rodikliai [1]:
didžiausias santykinis pailgėjimas

$$E_1 = \frac{1}{2}\left(e_{11} + e_{22}\right) + \sqrt{\left(e_{11} - e_{22}\right)^2 + \left(e_{12} + e_{21}\right)^2}\ , \quad (8)$$

mažiausias santykinis pailgėjimas

$$E_2 = \frac{1}{2}\left(e_{11} + e_{22}\right) - \sqrt{\left(e_{11} - e_{22}\right)^2 + \left(e_{12} + e_{21}\right)^2}\ , \quad (9)$$

didžiausio pailgėjimo kryptis

$$\varphi = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(-\frac{e_{12} + e_{21}}{e_{11} - e_{22}}\right) + \begin{bmatrix} 90°, \text{kai } \left(e_{11} - e_{22}\right) > 0 \\ 0°, \ \text{kai } \left(e_{11} - e_{22}\right) < 0 \end{bmatrix}, \quad (10)$$

dilatacija

$$\Delta = e_{11} + e_{22}\,, \quad (11)$$

baigtinio elemento posūkis

$$\omega = \frac{\rho}{2}\left(e_{12} - e_{21}\right). \quad (12)$$

Atlikdami teorinę analizę ir skaičiuojamąjį eksperimentą tariame, kad per pradinį matavimų ciklą baigtinių elementų (trikampių) viršūnių koordinatės neturi sistemingųjų paklaidų. Per kitus matavimų ciklus nustatytoms taškų koordinatėms įtakos turi pagal tam tikrus dėsnius pasireiškiančios sistemingosios paklaidos. Išnagrinėsime įvairius sistemingųjų paklaidų tiesinio kaupimosi atvejus.

1. Taškų koordinačių paklaidos pastovios. Tuomet per antrąjį matavimų ciklą nustatytų koordinačių reikšmės bus:

$$x_i'' = x_i' + \varepsilon_x\,, \quad (13)$$

$$y_i'' = y_i' + \varepsilon_y\,, \quad (14)$$

čia i=1, 2, 3 – trikampio viršūnių numeriai, x_i'', y_i'' – per antrąjį ciklą išmatuotų koordinačių reikšmės, kurioms įtakos turėjo sistemingosios paklaidos, x_i', y_i' – koordinačių reikšmės be sistemingųjų paklaidų, $\varepsilon_x, \varepsilon_y$ – pastoviosios sistemingosios antrojo matavimo ciklo koordinačių paklaidos.

Deformacijų rodiklių (8–12) reikšmių paklaidos priklausys nuo to, kokios įtakos sistemingosios koordinačių paklaidos $\varepsilon_x, \varepsilon_y$ turės determinantų (4–7) įverčiams. Determinantas (3) skaičiuojamas pagal pirmojo matavimų ciklo rezultatus, todėl antrojo matavimų ciklo sistemingosios paklaidos determinanto įverčiui reikšmės neturės.

Dėl sistemingųjų paklaidų įtakos determinanto D_{11} (4) reikšmė bus:

$$D_{11}' = \begin{vmatrix} 1 & x_1' + \varepsilon_x - x_1 & y_1 \\ 1 & x_2' + \varepsilon_x - x_2 & y_2 \\ 1 & x_3' + \varepsilon_x - x_3 & y_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \Delta x_1 & y_1 \\ 1 & \Delta x_2 & y_2 \\ 1 & \Delta x_3 & y_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & \varepsilon_x & y_1 \\ 1 & \varepsilon_x & y_2 \\ 1 & \varepsilon_x & y_3 \end{vmatrix}. \quad (15)$$

Iš (15) formulės matyti, kad antrojo determinanto pirmasis ir antrasis stulpeliai proporcingi, todėl determinanto reikšmė lygi nuliui [8–10] ir determinanto D_{11}' įvertis nepriklauso nuo paklaidų $\varepsilon_x, \varepsilon_y$, t. y.

$$D_{11}' = D_{11}\,. \quad (16)$$

Analogiškai gauname

$$D_{12}' = D_{12}\,, \quad (17)$$

$$D_{22}' = D_{22}\,, \quad (18)$$

$$D_{21}' = D_{21}\,. \quad (19)$$

Remiantis (16–19) lygybėmis galima daryti išvadą, kad antrojo matavimų ciklo pastoviosios sistemingosios matavimų paklaidos deformacijos tenzoriaus elementams (2) ir deformacijų reikšmių įverčiams (8–12) įtakos neturi.

2. Taškų koordinačių paklaidos priklauso nuo koordinačių reikšmių. Šiuo atveju per antrąjį matavimų ciklą nustatytos taškų koordinačių reikšmės bus:

$$x_i'' = x_i' + \mu_x x_i \,, \tag{20}$$

$$y_i'' = y_i' + \mu_y y_i \,, \tag{21}$$

čia μ_x, μ_y – tiesinę sistemingųjų matavimo paklaidų priklausomybę nuo koordinačių reikšmių apibūdinantys koeficientai.

Išnagrinėsime koordinačių (20), (21), kurioms įtakos turėjo paklaidos, reikšmę (4–7) determinantų įverčiams:

$$D_{11}' = \begin{vmatrix} 1 & x_1' + \mu_x x_1 - x_1 & y_1 \\ 1 & x_2' + \mu_x x_2 - x_2 & y_2 \\ 1 & x_3' + \mu_x x_3 - x_3 & y_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \Delta x_1 & y_1 \\ 1 & \Delta x_2 & y_2 \\ 1 & \Delta x_3 & y_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & \mu_x x_1 & y_1 \\ 1 & \mu_x x_2 & y_2 \\ 1 & \mu_x x_3 & y_3 \end{vmatrix} = D_{11} + \mu_x D \,. \tag{22}$$

Analogiškai gaunama

$$D_{22}' = D_{22} + \mu_y D \,. \tag{23}$$

Tokiu pačiu būdu kaip ir (22) lygybėje į (5) įrašius reikšmes iš (20), (21) ir išskaidžius determinantą į du dėmenis, gaunama

$$D_{12}' = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & \Delta x_1 \\ 1 & x_2 & \Delta x_2 \\ 1 & x_3 & \Delta x_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & x_1 & \mu_x x_1 \\ 1 & x_2 & \mu_x x_2 \\ 1 & x_3 & \mu_x x_3 \end{vmatrix} = D_{12} \,. \tag{24}$$

Kadangi antrojo determinanto antrasis ir trečiasis stulpelis proporcingi, analogiškai gaunama

$$D_{21}' = D_{21} \,. \tag{25}$$

Atsižvelgiant į (22–25) ir (2), deformacijų tenzo–riaus (1) elementai bus:

$$e_{11}' = e_{11} + \mu_x \,, \tag{26}$$

$$e_{12}' = e_{12} \,, \tag{27}$$

$$e_{22}' = e_{22} + \mu_y \,, \tag{28}$$

$$e_{21}' = e_{21} \,. \tag{29}$$

Turint deformacijų tenzoriaus elementus (26–27), apskaičiuojami deformacijų rodiklių įverčiai:

$$E_1 = \frac{1}{2}(e_{11} + e_{22}) + (\mu_x + \mu_y) + \sqrt{(e_{11} - e_{22}) + (\mu_x - \mu_y)^2 + (e_{12} + e_{21})^2} \,, \tag{30}$$

$$E_2 = \frac{1}{2}(e_{11} + e_{22}) + (\mu_x + \mu_y) - \sqrt{(e_{11} - e_{22}) + (\mu_x - \mu_y)^2 + (e_{12} + e_{21})^2} \,, \tag{31}$$

$$\varphi = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(-\frac{e_{12} + e_{21}}{(e_{11} - e_{22}) + (\mu_x - \mu_y)}\right) + \begin{bmatrix} 90°, \text{kai } (e_{11} - e_{22}) > 0 \\ 0°, \ \text{kai } (e_{11} - e_{22}) < 0 \end{bmatrix}, \tag{32}$$

$$\Delta = (e_{11} + e_{22}) + (\mu_x + \mu_y) \,, \tag{33}$$

$$\omega = \frac{\rho}{2}(e_{12} - e_{21}) \,. \tag{34}$$

3. Taškų koordinačių paklaidos yra pastoviųjų paklaidų ir koordinačių reikšmėms proporcingų paklaidų suma. Tuomet dėl paklaidų įtakos antrojo matavimų ciklo koordinatės bus:

$$x_i'' = x_i' + \varepsilon_x + \mu_x \cdot x_i \,, \tag{35}$$

$$y_i'' = y_i' + \varepsilon_y + \mu_y \cdot y_i \,. \tag{36}$$

Atsižvelgdami į (35), (36) įvertinsime determinantų (4–7) koordinačių reikšmes:

$$D_{11}' = \begin{vmatrix} 1 & x_1' + \varepsilon_x + \mu_x \cdot x_1 - x_1 & y_1 \\ 1 & x_2' + \varepsilon_x + \mu_x \cdot x_2 - x_2 & y_2 \\ 1 & x_3' + \varepsilon_x + \mu_x \cdot x_3 - x_3 & y_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \Delta x_1 & y_1 \\ 1 & \Delta x_2 & y_2 \\ 1 & \Delta x_3 & y_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & \varepsilon_x & y_1 \\ 1 & \varepsilon_x & y_2 \\ 1 & \varepsilon_x & y_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & \mu_x \cdot x_1 & y_1 \\ 1 & \mu_x \cdot x_2 & y_2 \\ 1 & \mu_x \cdot x_3 & y_3 \end{vmatrix} ,$$

arba

$$D_{11}' = D_{11} + \mu_x \cdot D \,. \tag{37}$$

Analogiškai gaunama

$$D_{12}' = D_{12} \,, \tag{38}$$

$$D_{22}' = D_{22} + \mu_y \cdot D \,, \tag{39}$$

$$D_{21}' = D_{21} \,. \tag{40}$$

Iš (37–39) matyti, kad esant (35) ir (36) sistemingosioms paklaidoms, determinantų (4–7) įverčiai yra tokie patys kaip ir anksčiau nagrinėtu atveju, kai sistemingosios paklaidos turi įtakos koordinatėms pagal (20) ir (21) priklausomybes. Todėl ir deformacijų rodikliams įtaka bus tokia pati.

4. Sistemingosios koordinačių paklaidos yra pastoviųjų ir abiejų koordinačių reikšmėms tiesiškai proporcingų paklaidų suma. Paklaidų įtaka antrojo matavimų ciklo metu nustatytoms koordinatėms bus:

$$x_i'' = x_i' + \varepsilon_x + \mu_1 \cdot x_i + \mu_2 \cdot y_i, \tag{41}$$

$$y_i'' = y_i' + \varepsilon_y + \mu_3 \cdot x_i + \mu_4 \cdot y_i. \tag{42}$$

Apskaičiuojame (4–7) determinantus, atsižvelgdami į (41), (42) priklausomybes:

$$D_{11}' = \begin{vmatrix} 1 & x_1' + \varepsilon_x + \mu_1 \cdot x_1 + \mu_2 y_1 & y_1 \\ 1 & x_2' + \varepsilon_x + \mu_1 \cdot x_2 + \mu_2 y_2 & y_2 \\ 1 & x_3' + \varepsilon_x + \mu_1 \cdot x_3 + \mu_2 y_3 & y_3 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & \Delta x_1 & y_1 \\ 1 & \Delta x_2 & y_2 \\ 1 & \Delta x_3 & y_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & \varepsilon_x & y_1 \\ 1 & \varepsilon_x & y_2 \\ 1 & \varepsilon_x & y_3 \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} 1 & \mu_1 \cdot x_1 & y_1 \\ 1 & \mu_1 \cdot x_2 & y_2 \\ 1 & \mu_1 \cdot x_3 & y_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & \mu_2 \cdot y_1 & y_1 \\ 1 & \mu_2 \cdot y_2 & y_2 \\ 1 & \mu_2 \cdot y_3 & y_3 \end{vmatrix},$$

arba

$$D_{11}' = D_{11} + \mu_1 \cdot D. \tag{43}$$

Analogiškai gaunama:

$$D_{12}' = D_{12} + \mu_2 \cdot D, \tag{44}$$

$$D_{22}' = D_{22} + \mu_4 \cdot D, \tag{45}$$

$$D_{21}' = D_{21} + \mu_3 \cdot D. \tag{46}$$

Atsižvelgiant į (43–46), deformacijų tenzoriaus (1) elementų reikšmės yra:

$$e_{11}' = e_{11} + \mu_1, \tag{47}$$

$$e_{12}' = e_{12} + \mu_2, \tag{48}$$

$$e_{22}' = e_{22} + \mu_4, \tag{49}$$

$$e_{21}' = e_{21} + \mu_3. \tag{50}$$

Deformacijų rodikliai (8–12) šiuo atveju:

$$E_1 = \frac{1}{2} \cdot \Big[(e_{11} + e_{22}) + (\mu_1 + \mu_4) + \sqrt{[(e_{11} - e_{22}) + (\mu_1 - \mu_4)]^2 + [(e_{12} - e_{21}) + (\mu_2 - \mu_3)]^2} \Big], \tag{51}$$

$$E_2 = \frac{1}{2} \cdot \Big[(e_{11} + e_{22}) + (\mu_1 + \mu_4) - \sqrt{[(e_{11} - e_{22}) + (\mu_1 - \mu_4)]^2 + [(e_{12} - e_{21}) + (\mu_2 - \mu_3)]^2} \Big], \tag{52}$$

$$\varphi = \frac{1}{2} \operatorname{arctg}\left(-\frac{(e_{12} + e_{21}) + (\mu_2 + \mu_3)}{(e_{11} - e_{22}) + (\mu_1 - \mu_4)} \right) + \begin{bmatrix} 90°, \text{kai } (e_{11} - e_{22}) > 0 \\ 0°, \ \text{kai } (e_{11} - e_{22}) < 0 \end{bmatrix}, \tag{53}$$

$$\Delta = (e_{11} + e_{22}) + (\mu_1 + \mu_4), \tag{54}$$

$$\omega = \frac{1}{2} \cdot [(e_{12} - e_{21}) + (\mu_2 - \mu_3)]. \tag{55}$$

5. Sistemingosios koordinačių paklaidos, atsiradusios dėl geodezinio tinklo koordinačių pradžios poslinkio, orientavimo ir mastelio pokyčio. Esant nedideliam orientavimo pokyčiui sistemingosios punktų koordinačių paklaidos bus lygios koordinačių pataisoms, gaunamoms perskaičiuojant koordinates iš vienos sistemos į kitą [1], t. y.

$$x_i'' = x_i' + a_0 - \alpha \cdot y_i + m \cdot x_i, \tag{56}$$

$$y_i'' = y_i' + b_0 + \alpha \cdot x_i + m \cdot y_i, \tag{57}$$

čia a_0, b_0 – koordinačių pradžios poslinkis, α – orien–tavimo pokyčio reikšmė radianais, m – mastelio pokytis. Palyginus (56) ir (57) lygtis su (41) ir (42), matome jų panašumą. Pažymėjus (56), (57) lygtyse $a_0 = \varepsilon_x$, $b_0 = \varepsilon_y$, $-\alpha = \mu_1$, $m = \mu_2 = \mu_4$, $\alpha = \mu_3$, jos būtų tapačios (41) ir (42) lygtims. Todėl šiuo atveju sistemingųjų koordinačių paklaidų įtaka Žemės plutos deformacijų tenzorių ir deformacijų rodiklių įverčiams tokia pati, kaip nagrinėtame 4-ajame variante.

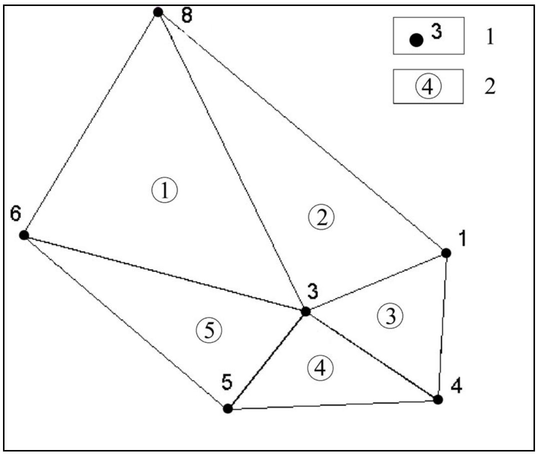
3. Skaičiuojamasis eksperimentas

Atliktas šešis punktus turinčio geodezinio tinklo skaičiuojamasis eksperimentas (žr. pav.). Teritorija suskaidyta į penkis trikampius.

Pagal pirmojo ir antrojo matavimų ciklų rezultatus nustatytosios punktų koordinatės, kurioms neturėjo įtakos sistemingosios paklaidos, pateiktos 1 lentelėje.

Skaičiavimai atlikti trimis variantais:

– kai nėra sistemingųjų paklaidų (pagal 1 lentelėje pateiktas koordinačių reikšmes);
– kai koordinačių paklaidos pastoviosios, t. y. kai antrojo matavimų ciklo koordinatės modeliuojamos pagal (13) ir (14) lygtis;
– kai koordinačių sistemingosios paklaidos modeliuojamos pagal (20) ir (21) lygtis.



Geodezinio tinklo schema (1 – GPS punktas, 2 – trikampio numeris)
Scheme of geodetic network (1 – GPS point, 2 – number of triangle)

Modeliuojant tariama: $\varepsilon_x = 0{,}040\,\mathrm{m}, \varepsilon_y = -0{,}025\,\mathrm{m}$, $\mu_x = \mu_y = -1 \cdot 10^{-6}$.

Visų trijų modeliavimo variantų apskaičiuotosios deformacijų tenzoriaus (1) reikšmės pateiktos 2 lentelėje, o svarbiausiųjų deformacijų rodiklių – didžiausiojo pailgėjimo E_1 (8), mažiausiojo pailgėjimo E_2 (9) ir dilatacijos Δ (11) reikšmės – 3 lentelėje.

1 lentelė. Geodezinio tinklo punktų koordinatės
Table 1. Coordinates of geodetic network points

Punktai	Koordinačių reikšmės (m)	
	Pirmasis matavimas	
	x	y
1	66373,772	62793,511
3	64276,247	57780,546
4	61073,407	62485,044
5	60745,917	55036,724
6	66983,435	47762,041
8	75083,175	52536,489
	Antrasis matavimas	
	x’	y’
1	66373,772	62793,511
3	64276,255	57780,555
4	61073,417	62485,044
5	60745,930	55036,728
6	66983,429	47762,049
8	75083,165	52536,487

2 lentelė. Deformacijų tenzoriaus elementų reikšmės
Table 2. Elements of strain tensor

Trikam-pio Nr.	Modeliavimo variantai											
	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3
	$e_{11} \cdot 10^{-6}$			$e_{12} \cdot 10^{-6}$			$e_{21} \cdot 10^{-6}$			$e_{22} \cdot 10^{-6}$		
1	–1,14	–1,14	–2,14	1,09	1,09	1,09	–1,12	–1,12	–1,12	–0,20	–0,20	–1,20
2	–2,03	–2,03	–3,03	–0,75	–0,75	–0,75	–1,57	–1,57	–1,57	–1,14	–1,14	–2,14
3	–1,84	–1,84	–2,84	–0,83	–0,83	–0,83	0,11	0,11	0,11	–1,84	–1,84	–2,84
4	–1,14	–1,14	–2,14	–0,35	–0,35	–0,35	1,90	1,90	1,90	–0,62	–0,62	–1,62
5	–2,07	–2,07	–3,07	–0,84	–0,84	–0,84	1,11	1,11	1,11	0,40	0,40	–0,60

3 lentelė. Svarbiausiųjų deformacijų reikšmės
Table 3. Magnitudes of principal strains

Trikam-pio Nr.	Modeliavimo variantai								
	1	2	3	1	2	3	1	2	3
	$E_1 \cdot 10^{-6}$			$E_2 \cdot 10^{-6}$			$\Delta \cdot 10^{-6}$		
1	–0,20	–0,20	–1,20	–1,14	–1,14	–2,14	–1,34	–1,34	–3,34
2	–0,34	–0,34	–1,34	–2,83	–2,83	–3,83	–3,17	–3,17	–5,17
3	–1,48	–1,48	–2,48	–2,20	–2,20	–3,20	–3,68	–3,68	–5,68
4	–0,07	–0,07	–1,07	–1,70	–1,70	–2,70	–1,76	–1,76	–3,76
5	0,74	0,74	–0,26	–2,41	–2,41	–3,41	–1,67	–1,67	–3,67

Iš 2 ir 3 lentelėse pateiktų duomenų matyti, kad modeliavimo rezultatai atitinka teorinių tyrimų duomenis.

4. Išvados

Apibendrinus atliktus Žemės plutos deformacijų tenzorių ir svarbiausiųjų deformacijų rodiklių įvertinimo pagal geodezinių matavimų duomenis baigtinių elementų metodu teorinių tyrimų bei skaičiuojamojo eksperimento rezultatus galima daryti šias pagrindines išvadas:

1. Žemės plutos deformacijų tenzoriams ir svarbiausiųjų deformacijų rodiklių įverčiams pastoviosios geodezinių punktų koordinačių paklaidos įtakos neturi.

2. Žemės plutos deformacijų tenzoriaus komponentės ir deformacijų rodikliai dėl bet kokių tiesiškai nuo geodezinių punktų padėties priklausančių sistemingųjų koordinačių paklaidų keičiasi pastovia reikšme ir tas pokytis nuo koordinačių reikšmių nepriklauso.

3. Nustačius tiesiškai nuo geodezinių punktų padėties koordinačių priklausomų sistemingųjų paklaidų dėsningumus, galima įvertinti paklaidų įtaką Žemės plutos deformacijų rodikliams ir šią įtaką eliminuoti.

4. Dėl sistemingųjų geodezinių punktų koordinačių paklaidų Žemės plutos deformacijų rodiklių įverčiai gaunami pasislinkę, tačiau jų kaita tiriant nagrinėjamą teritoriją yra tokia pati, kaip ir nesant sistemingųjų paklaidų.

Literatūra

1. Zakarevičius, A. Investigation of the recent geodynamic processes in the territory of Lithuania (Dabartinių geodinaminių procesų Lietuvos teritorijoje tyrimas). Vilnius: Technika, 2003. 195 p. (in Lithuanian).
2. Zakarevičius, A. Relationships of vertical and horizontal Earth's crust movements. *Geodesy and Cartography (Geodezija ir kartografija)*, Vol XXIV, No 4, Vilnius: Technika, 1998, p. 185–192 (in Lithuanian).
3. Sagiya, T.; Miyazaky, S.; Tada, T. Continuous GPS array and present–day crustal deformation of Japan. *Pure and Applied Geophysics*, Vol 157, Numbers 11–12. Birkhäuser Verlag AG, 2000, p. 2303–2322.
4. Vaníček, P.; Craymer, M. R.; Krakiwsky, E. J. Robustness analysis of geodetic horizontal networks. *Journal of Geodesy*, Vol 75, No 4. Springer–Verlag, 2001, p. 199–209.
5. Petroškevičius, P. Gravitation field effect on geodetic observations (Gravitacijos lauko poveikis geodeziniams matavimams). Vilnius: Technika, 2004. 292 p. (in Lithuanian).
6. Grafarend, E. W.; Voosoghi, B. Intrinsic deformation analysis of the Earth's surface based on displacement fields derived from space geodetic measurements. Case studies: present–day deformation patterns of Europe and of the Mediterranean area (ITRF data sets). *Journal of Geodesy*, Vol 77. Springer–Verlag, 2003, p. 303–326.
7. Amore, M.; Bonaccorso, A.; Ferrari, F.; Matia, M. Eolo: software for the automatic on–line treatment and analysis of GPS data for environmental monitoring. *Computers & Geosciences*, Vol 28. Elsevier Science Ltd., 2002, p. 271–280.
8. Zakarevičius, A. Coordinate systems of Lithuanian geodetic networks and their connections (Lietuvos geodezinių tinklų koordinačių sistemos ir jų ryšiai). Vilnius: Technika, 1996. 200 p. (in Lithuanian).
9. Skeivalas, J. Treatment of correlated geodetic measurements (Koreliuotų geodezinių matavimų rezultatų matematinis apdorojimas). Vilnius: Technika, 1995. 272 p. (in Lithuanian).
10. Ango, A. Mathematics for electro- and radio-engineers (Математика для электро- и радиоинженеров). Москва: Наука, 1967. 778 c. (in Russian).

Algimantas ZAKAREVIČIUS. Doctor Habil, Professor, Head of Dept of Geodesy and Cadastre, Vilnius Gediminas Technical University, Saulėtekio al. 11, LT-10223 Vilnius-40, Lithuania (tel. +37052744701), e-mail:
Algimantas.Zakarevicius@ap.vtult.

A graduate of Kaunas Polytechnic Institute (now Kaunas University of Technology), geodetic engineer, 1965. Doctor's degree at Vilnius University, 1973. Dr Habil degree at VGTU, 2000. Member of the Geodetic Commission of Estonia, Latvia and Lithuania. Research training at Geodetic Institute of Norwegian Mapping Authority, 1994. Author of over 130 publications and 3 monographs.

Research interests: investigations of the recent geodynamic processes, formation of geodetic networks.

Rūta PUZIENĖ. Doctoral student.

Vilnius Gediminas Technical University, Dept of Geodesy and Cadastre, Saulėtekio al. 11, LT-10223 Vilnius, Lithuania (tel. +37052744703), e-mail: rutapu@delfi.lt.

A graduate of Vilnius Gediminas Technical University (Master of science, 2003). Co-author of 2 publications.
Research interests: investigation of geodynamic processes, investigations of deformations.

Arminas STANIONIS. Doctoral student.

Vilnius Gediminas Technical University, Dept of Geodesy and Cadastre, Saulėtekio al. 11, LT-10223 Vilnius-40, Lithuania (tel. +37052744703), e-mail: ArminasStanionis@one.lt.

A graduate of Vilnius Gediminas Technical University (VGTU) (Master of science, 2002). Author and co-author of 10 publications.

Research interests: investigation of geodynamic processes, GIS, investigations of deformations.