

THE EQUILIBRIUM FINITE ELEMENTS IN COMPUTATION OF ELASTIC STRUCTURES

S. Kalanta

To cite this article: S. Kalanta (1995) THE EQUILIBRIUM FINITE ELEMENTS IN COMPUTATION OF ELASTIC STRUCTURES, *Statyba*, 1:1, 25-47, DOI: [10.1080/13921525.1995.10531500](https://doi.org/10.1080/13921525.1995.10531500)

To link to this article: <https://doi.org/10.1080/13921525.1995.10531500>



Published online: 26 Jul 2012.



Submit your article to this journal [↗](#)



Article views: 106



Citing articles: 6 [View citing articles](#) [↗](#)

РАВНОВЕСНЫЕ КОНЕЧНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ В РАСЧЕТАХ УПРУГИХ КОНСТРУКЦИЙ

С.Каланга

1. Введение

Равновесные и совместные конечные элементы позволяют определить верхние и нижние значения параметров напряженно-деформированного состояния (НДС) конструкций. Такой двухсторонний анализ является эффективным средством оценки результатов численного расчета. Кроме того, равновесные конечные элементы (РКЭ) предоставляют статически возможные (удовлетворяющие уравнениям равновесия) распределения усилий, которые часто необходимы при упругопластическом анализе конструкций. Однако РКЭ чаще применяются только в расчетах упругопластических конструкций и не исследованы так хорошо как геометрически совместные элементы. Цель данной статьи – совершенствование алгоритмов и исследование эффективности РКЭ применительно к упругим конструкциям, развитие их для применения к разным видам воздействий.

Рассматривается задача анализа НДС тонких линейно упругих пластинок и оболочек под действием внешней нагрузки $\mathbf{F}(\mathbf{x})$, начальных деформаций $\Theta_0(\mathbf{x})$ и перемещений $\mathbf{u}_0(\mathbf{x})$. НДС срединной поверхности конструкции описывается векторами усилий $\mathbf{S}(\mathbf{x})$, перемещений $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ и деформаций $\Theta(\mathbf{x})$. Начальными считаются деформации, вызванные предварительным деформированием или напряжением, температурными и другими воздействиями.

2. Зависимости равновесного конечного элемента

Срединная поверхность пластинки (оболочки) разделяется на s конечных элементов поверхности A_k . Усилия в каждом элементе аппроксимируются функциями

$$\mathbf{S}_k(\mathbf{x}) = [H_k(\mathbf{x})]\mathbf{S}_k, \quad k=1,2,\dots,s, \quad (1)$$

где $[H_k(\mathbf{x})]$ - матрица функций формы s -го элемента; \mathbf{S}_k - вектор усилий узловых точек элемента. Функции (1) должны удовлетворять требованиям сходимости. Они должны предоставлять возможность реализации однородного НДС и обладать определенной гладкостью внутри и на поверхностях раздела элементов [1]. В отличие от работ [1–3] здесь не ставится требование, чтобы функции (1) априорно удовлетворяли дифференциальным условиям равновесия

$$[\mathcal{L}] \mathbf{S}_k(\mathbf{x}) = \mathbf{F}_k(\mathbf{x}) \quad (2)$$

внутри элемента. Вводом дополнительных степеней свободы эти условия удовлетворяются в виде дополнительных ограничений на дополнительную энергию элемента. Таким образом значительно упрощается и унифицируется построение интерполирующих функций усилий. Выбор функций, тождественно удовлетворяющих уравнениям (2), довольно сложен, не универсален, а для сложных оболочечных конструкций и невозможен.

Уравнения равновесия. Вводится вектор обобщенных узловых сил \mathbf{P}_k , работа которых на обобщенных перемещениях \mathbf{u}_k должна быть эквивалентна работе внутренних сил $\mathbf{S}_k(\mathbf{x})$. Он подчиняется уравнениям равновесия элемента

$$\mathbf{P}_k = [A_k]\mathbf{S}_k, \quad (3)$$

включающим в себя уравнения равновесия внутри (если функции (1) тождественно не удовлетворяют условиям (2)) и на границах элемента. В качестве обобщенных сил могут быть приняты локальные (распределенные) или сосредоточенные силы. Им соответствуют взвешенные (интегральные) или узловые обобщенные перемещения. Во втором случае уравнения (3) строятся с привлечением метода коллокации Бубнова–Галеркина. Обобщенные силы и перемещения выбираются с таким расчетом, чтобы уравнения равновесия дискретной модели конструкции, составленные по направлению этих перемещений, гарантировали удовлетворение условий равновесия во всех точках внутри и на границах элементов.

Обобщенные силы \mathbf{P}_k не независимы, так как удовлетворяют уравнениям равновесия элемента как жесткого целого. Связь между ними можно определить преобразованием уравнения (3). Оно разделяется на две части:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{P}_{pk} \\ \mathbf{P}_{rk} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [A_{pk}] \\ [A_{rk}] \end{bmatrix} \mathbf{S}_k,$$

где $[A_{pk}]$ - квадратная базисная матрица, соответствующая степеням свободы \mathbf{u}_{pk} ; $[A_{rk}]$ - матрица уравнений равновесия, соответствующая перемещениям \mathbf{u}_{rk} элемента как жесткого целого, на которых работа не производится. Решение верхнего уравнения

$$\mathbf{S}_k = [A_{pk}]^{-1} \mathbf{P}_{pk} \quad (4)$$

подставляется в (3). Тогда уравнения равновесия

$$\mathbf{P}_k = [B_k] \mathbf{P}_{pk}, \quad (5)$$

где

$$[B_k] = [A_k] [A_{pk}]^{-1} = \begin{bmatrix} [E] \\ [A_{rk}] [A_{pk}]^{-1} \end{bmatrix}; \quad (6)$$

$[E]$ - единичная матрица. Таким образом, представлены два вида уравнений равновесия. Одно из них выражено через обобщенные усилия \mathbf{S}_k , а другое - через силы \mathbf{P}_{pk} .

Геометрические уравнения. Дополнительная энергия элемента

$$\Pi_k = \frac{1}{2} \mathbf{S}_k^T [D_k] \mathbf{S}_k + \mathbf{S}_k^T \Theta_{0k} - \mathbf{S}_k^T [A_k]^T \mathbf{u}_k, \quad (7)$$

где матрица податливости элемента

$$[D_k] = \int_{A_k} [H_k(\mathbf{x})]^T [d_k] [H_k(\mathbf{x})] dA_k \quad (8)$$

и вектор взвешенных начальных деформаций

$$\Theta_{0k} = \int_{A_k} [H_k(\mathbf{x})]^T \Theta_{0k}(\mathbf{x}) dA_k;$$

$[d_k]$ - матрица податливости бесконечно малого элемента конструкции. Минимальное значение функции (7) достигается при условии

$$[D_k] \mathbf{S}_k + \Theta_{0k} - [A_k]^T \mathbf{u}_k = \mathbf{0}. \quad (9)$$

Оно является условием стационарности функционала (7) и представляет собой геометрические уравнения элемента. Матрица податливости $[D_k]$ определяет связь между обобщенными усилиями и деформациями. Выражая дополнительную энергию

$$\Pi_k = \frac{1}{2} \mathbf{P}_{pk}^T [f_k] \mathbf{P}_{pk} + \mathbf{P}_{pk}^T [f_k] \mathbf{F}_{0pk} - \mathbf{P}_{pk}^T [B_k]^T \mathbf{u}_k$$

через обобщенные силы \mathbf{P}_{pk} , можно получить вторую форму геометрических уравнений:

$$[f_k] (\mathbf{P}_{pk} + \mathbf{F}_{0pk}) - [B_k]^T \mathbf{u}_k = \mathbf{0}. \quad (10)$$

Здесь матрица податливости

$$[f_k] = \left([A_{pk}]^{-1} \right)^T [D_k] [A_{pk}]^{-1} \quad (11)$$

связывает обобщенные силы \mathbf{P}_{pk} и перемещения. При преобразовании функционала дополнительной энергии использованы зависимости (4), (6) и

$$\Theta_{0k} = [D_k] [A_{pk}]^{-1} \mathbf{F}_{0pk}, \quad \mathbf{F}_{0pk} = [A_{pk}] [D_k]^{-1} \Theta_{0k}, \quad (12)$$

где \mathbf{F}_{0pk} - вектор узловых сил, эквивалентных начальным деформациям Θ_{0k} .

Уравнение (10) также можно получить прямым преобразованием уравнения (9) - заменой переменных и умножением слева на матрицу $\left([A_{pk}]^{-1} \right)^T$. Умножая

зависимость (11) слева на $[A_{pk}]^T$ и справа на $[A_{pk}]$, можно определить обратную связь матриц податливости:

$$[D_k] = [A_{pk}]^T [f_k] [A_{pk}].$$

Физические зависимости. Получены две эквивалентные системы уравнений (3), (9) и (4), (5), (10). Они описывают НДС равновесного элемента. Используя их, построим физические зависимости элемента: уравнения жесткости и податливости.

Решая систему уравнений (3), (9) относительно вектора \mathbf{P}_k , получаем уравнение жесткости

$$\mathbf{P}_k = [k_k] \mathbf{u}_k - \mathbf{F}_{0k}, \quad (13)$$

где матрица жесткости равновесного элемента

$$[k_k] = [A_k [D_k]^{-1} A_k]^T \quad (14)$$

и вектор узловых сил

$$\mathbf{F}_{0k} = [A_k [D_k]^{-1} \Theta_{0k}]. \quad (15)$$

Для построения уравнений податливости необходимо исключить степени свободы \mathbf{u}_{rk} , отвечающие перемещению элемента как жесткого целого. Поэтому элемент закрепляется так, чтобы получилась кинематически неизменяемая, но внешне статически определимая система. Для каждой системы уравнений возможны два способа построения уравнений податливости: прямой и обратный. Прямой способ заключается в решении системы уравнений относительно оставшихся степеней свободы \mathbf{u}_{pk} [4]. Решение (4) уравнений равновесия (3) подставляется в (9) и с учетом $\mathbf{u}_{rk} = \mathbf{0}$ получается:

$$[A_{pk}]^T \mathbf{u}_{pk} = [D_k] [A_{pk}]^{-1} \mathbf{P}_{pk} + \Theta_{0k}.$$

Отсюда уравнение податливости элемента

$$\mathbf{u}_{pk} = [f_k] (\mathbf{P}_{pk} + \mathbf{F}_{0pk}), \quad (16)$$

где матрица податливости $[f_k]$ определена выражением (11).

Обратный способ заключается в преобразовании уравнений жесткости в уравнения податливости. Уравнение (13) разбивается на две части:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{P}_{pk} \\ \mathbf{P}_{rk} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [k_{pp}] & [k_{pr}] \\ [k_{rp}] & [k_{rr}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_{pk} \\ \mathbf{u}_{rk} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_{0pk} \\ \mathbf{F}_{0rk} \end{Bmatrix}.$$

Решая верхнюю часть уравнений относительно \mathbf{u}_{pk} и учитывая $\mathbf{u}_{rk} = \mathbf{0}$, получаются уравнения (16) и матрица податливости

$$[f_k] = [k_{pp}]^{-1} \quad (17)$$

Теперь рассмотрим построение физических зависимостей элемента из системы уравнений (5), (10). Выражая из геометрических уравнений (10) вектор

$$\mathbf{P}_{pk} = [f_k]^{-1} [B_k]^T \mathbf{u}_k - \mathbf{F}_{0pk}$$

и подставляя его в (5), получаем уравнение жесткости (13) и матрицу жесткости

$$[k_k] = [B_k] [f_k]^{-1} [B_k]^T. \quad (18)$$

Построение уравнений податливости проще. Геометрические уравнения (10) с учетом

$$\mathbf{u}_{rk} = \mathbf{0} \quad \text{и} \quad [B_k]^T \mathbf{u}_k = [B_{pk}]^T \mathbf{u}_{pk} = \mathbf{u}_{pk}$$

превращаются в уравнения податливости.

Нетрудно доказать эквивалентность выражений (14) и (18). Цепочка преобразований

$$[k_k] = [B_k] [f_k]^{-1} [B_k]^T = [A_k] [A_{pk}]^{-1} [A_{pk}] [D_k]^{-1} [A_{pk}]^T \left([A_{pk}]^{-1} \right)^T [A_k]^T = [A_k] [D_k]^{-1} [A_k]^T$$

очевидна. Выражение (18) позволяет матрицу податливости $[f_k]$ преобразовать в матрицу жесткости элемента. При этом $[f_k]^{-1}$ можно получить прямым обращением или по формуле

$$[f_k]^{-1} = [A_{pk}] [D_k]^{-1} [A_{pk}]^T, \quad (19)$$

которая использована в цепочке преобразований.

Итак, получены две формы уравнений равновесия, геометрических уравнений и физических зависимостей, а также выражения матриц жесткости и податливости равновесного конечного элемента. Построены формулы преобразования матрицы жесткости в матрицу податливости и наоборот.

3. Кинематический анализ элемента

В корректно построенном конечном элементе не должны вызывать деформаций лишь те степени свободы, которые соответствуют перемещению элемента как жесткого целого. Исследуем элемент в этом отношении.

Уравнение

$$[A_k]^T \mathbf{u}_k = \mathbf{0} \quad (20)$$

описывает перемещения, при которых обобщенные деформации элемента равны нулю. Ненулевые решения этого уравнения есть перемещения, на которых работа внутренних сил элемента равна нулю. Среди этих решений есть m_{rk} перемещений элемента как жесткого целого. Уравнения (20) можно представить в виде

$$[A_{pk}]^T \mathbf{u}_{pk} + [A_{rk}]^T \tilde{\mathbf{u}}_{rk} = \mathbf{0},$$

где $\tilde{\mathbf{u}}_{rk}$ – вектор независимых перемещений. Тогда

$$\mathbf{u}_{pk} = -\left([A_{pk}]^{-1}\right)^T [A_{rk}]^T \tilde{\mathbf{u}}_{rk}$$

и решение уравнения (20)

$$\mathbf{u}_k = \begin{bmatrix} -\left([A_{pk}]^{-1}\right)^T [A_{rk}]^T \\ [E] \end{bmatrix} \tilde{\mathbf{u}}_{rk} = [G_k] \tilde{\mathbf{u}}_{rk}. \quad (21)$$

После подстановки этого решения в (20) получаем

$$[A_k]^T [G_k] \tilde{\mathbf{u}}_{rk} = \mathbf{0}.$$

Так как вектор $\tilde{\mathbf{u}}_{rk}$ произвольный, то

$$[A_k]^T [G_k] = [0]. \quad (22)$$

Производя перемножение матриц можно убедиться в правильности этого утверждения. Умножая (22) слева на \mathbf{S}_k^T , получаем уравнения равновесия

$$[G_k]^T \mathbf{P}_k = \mathbf{0}. \quad (23)$$

Пусть m_k – число обобщенных сил P_k (число степеней свободы элемента), m_{pk} – число составляющих вектора S_k . Если удовлетворяется равенство

$$m_k = m_{pk} + m_{rk},$$

то $\tilde{u}_{rk} = u_{rk}$, т. е. вектор независимых перемещений \tilde{u}_{rk} выражается только через m_{rk} перемещений элемента как жесткого целого. Тогда условие (23) выражает уравнения глобального равновесия элемента

$$-[A_{rk}] [A_{pk}]^{-1} P_{pk} + P_{rk} = 0,$$

которым удовлетворяют обобщенные силы. Однако, если

$$m_k > m_{pk} + m_{rk},$$

то существуют лишние степени свободы элемента, без предварительного исключения которых невозможно построить матрицу податливости $[f_k]$ и применить такой элемент в практических расчетах. Лишние степени свободы можно исключить, однако лучше изменить аппроксимирующие функции усилий (1) или обобщенные силы.

Если же $m_k < m_{pk}$, то однородная система

$$[A_k] S_k = 0$$

может иметь $m_k - m_{pk}$ ненулевых усилий, которые существуют при нулевых поверхностных силах $P_k = 0$. Тогда недостаточно сил P_k , чтобы обеспечить равновесное состояние элемента, поэтому он является подравновесным. Такой элемент пригоден к практическому применению, но нет гарантии, что при сгущении расчетной сетки результаты расчета будут приближаться к точным. В этом случае вводом внутренних сил или усилением требований к непрерывности функций усилий обобщенные силы могут быть дополнены до нужного числа.

4. Математические модели задачи

Прямые постановки. Совокупность конечных элементов дискретной модели конструкции описывается векторами

$$\mathbf{P} \equiv \{\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \dots, \mathbf{P}_s\}^T, \quad \mathbf{S} \equiv \{\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2, \dots, \mathbf{S}_s\}^T, \quad \bar{\mathbf{u}} \equiv \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_s\}^T$$

и уравнениями

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= [\bar{A}]\mathbf{S}, & [D]\mathbf{S} + \Theta_0 - [\bar{A}]^T \bar{\mathbf{u}} &= \mathbf{0}, \\ \mathbf{P} &= [\bar{B}]\mathbf{P}_p, & [f](\mathbf{P}_p + \mathbf{F}_{0p}) - [\bar{B}]^T \bar{\mathbf{u}} &= \mathbf{0}, \\ \mathbf{P} &= [\bar{K}]\bar{\mathbf{u}} - \bar{\mathbf{F}}_0, & \mathbf{u}_p &= [f](\mathbf{P}_p + \mathbf{F}_{0p}). \end{aligned} \quad (24)$$

где $[\bar{A}]$, $[\bar{B}]$, $[D]$, $[\bar{K}]$, $[f]$ – квазидиагональные матрицы, диагональными блоками которых являются матрицы $[A_k]$, $[B_k]$, $[D_k]$, $[k_k]$ и $[f_k]$, $k = 1, 2, \dots, s$. Здесь уравнения равновесия одного элемента не связаны с уравнениями равновесия других элементов. То же самое касается и остальных зависимостей. Внешние воздействия описываются векторами \mathbf{F} , \mathbf{F}_0 , \mathbf{u}_0 , а перемещения – вектором \mathbf{u} .

Объединение свободных конечных элементов в дискретную модель конструкции осуществляется при помощи уравнений совместности перемещений

$$\bar{\mathbf{u}} = [C]\mathbf{u} + [C_0]\mathbf{u}_0, \quad (25)$$

устанавливающих связь между перемещениями узлов элементов и дискретной модели. Уравнения равновесия дискретной модели строятся на основе принципа возможных перемещений [5], согласно которому

$$\{\delta \bar{\mathbf{u}}\}^T \mathbf{P} = \{\delta \mathbf{u}\}^T \mathbf{F}.$$

Учитывая зависимости (25) и произвольность вариации $\delta \mathbf{u}$, они получают такой вид

$$[C]^T \mathbf{P} = \mathbf{F} \quad (26)$$

или $[A]\mathbf{S} = \mathbf{F}, \quad (27)$

или $[B]\mathbf{P}_p = \mathbf{F}. \quad (28)$

Здесь

$$[A] = [C]^T [\bar{A}], \quad [B] = [C]^T [\bar{B}]. \quad (29)$$

Для узлов на опорном контуре, где заданы перемещения \mathbf{u}_0 , составляются уравнения равновесия

$$[A_0]\mathbf{S} = \mathbf{F}_r \quad \text{или} \quad [B_0]\mathbf{P}_p = \mathbf{F}_r, \quad (30)$$

где

$$[A_0] = [C_0]^T [\bar{A}], \quad [B_0] = [C_0]^T [\bar{B}]. \quad (31)$$

На основе зависимостей (24)–(31) для дискретной модели конструкции получаются следующие уравнения жесткости и геометрической совместности:

$$\begin{aligned} \mathbf{P} - [\bar{K}][C]\mathbf{u} &= [\bar{K}][C_0]\mathbf{u}_0 - \bar{\mathbf{F}}_0, \\ [f]\mathbf{P}_p - [B]^T \mathbf{u} &= [B_0]^T \mathbf{u}_0 - [f]\mathbf{F}_{0p}, \\ [D]\mathbf{S} - [A]^T \mathbf{u} &= [A_0]^T \mathbf{u}_0 - \Theta_0. \end{aligned}$$

Тогда задача анализа НДС упругой конструкции может быть представлена математической моделью

$$[A]\mathbf{S} = \mathbf{F}, \quad [D]\mathbf{S} - [A]^T \mathbf{u} = [A_0]^T \mathbf{u}_0 - \Theta_0 \quad (32)$$

$$\text{или} \quad [C]^T \mathbf{P} = \mathbf{F}, \quad \mathbf{P} - [\bar{K}][C]\mathbf{u} = [\bar{K}][C_0]\mathbf{u}_0 - \bar{\mathbf{F}}_0, \quad (33)$$

$$\text{или} \quad [B]\mathbf{P}_p = \mathbf{F}, \quad [f]\mathbf{P}_p - [B]^T \mathbf{u} = [B_0]^T \mathbf{u}_0 - [f]\mathbf{F}_{0p}. \quad (34)$$

Неизвестными в них являются вектор перемещений \mathbf{u} и вектор усилий \mathbf{S} , либо вектор обобщенных сил \mathbf{P} или \mathbf{P}_p . Все математические модели получены прямым построением системы уравнений и называются прямыми постановками.

Вариационные постановки. Математические модели (32) и (34) могут быть получены как уравнения Эйлера для некоторых функционалов Рейсснера. Эти функционалы могут быть построены преобразованием вариационного принципа дополнительной энергии либо полной потенциальной энергии или другими способами.

Задачу определения вектора \mathbf{S} представляет вариационный принцип дополнительной энергии:

$$\Pi_k = \frac{1}{2} \mathbf{S}^T [D]\mathbf{S} + \mathbf{S}^T \Theta_0 - \mathbf{S}^T [A_0]^T \mathbf{u}_0 \rightarrow \min \quad (35)$$

при условиях

$$[A]\mathbf{S} = \mathbf{F}.$$

Методом множителей Лагранжа этот принцип преобразуется в следующий принцип Рейсснера

$$\Pi_R = \frac{1}{2} \mathbf{S}^T [D] \mathbf{S} + \mathbf{S}^T \Theta_0 - \mathbf{S}^T [A_0]^T \mathbf{u}_0 + \mathbf{u}^T \{ \mathbf{F} - [A] \mathbf{S} \} \rightarrow \text{стац.} \quad (36)$$

Условия стационарности этого функционала представляют собой систему уравнений (32). В случае кинематически возможных перемещений этот функционал выражает полную потенциальную энергию. Поэтому задачу (36) можно преобразовать в задачу минимизации

$$\Pi_L = \frac{1}{2} \mathbf{S}^T [D] \mathbf{S} - \mathbf{u}^T \mathbf{F} \rightarrow \min \quad (37)$$

при условиях

$$[D] \mathbf{S} - [A]^T \mathbf{u} = [A_0]^T \mathbf{u}_0 - \Theta_0,$$

которая выражает принцип полной потенциальной энергии и эквивалентна задачам (32) и (36).

При отсутствии начальных деформаций задача (35) выражает классический принцип Кастильяна. После исключения усилий \mathbf{S} задача (37) преобразуется в классическую задачу безусловной минимизации функционала Лагранжа (полной потенциальной энергии)

$$\Pi_{L1} = \sum_{k=1}^s \frac{1}{2} \mathbf{u}^T [C_k]^T [k_k] [C_k] \mathbf{u} - \mathbf{u}^T (\mathbf{F} + \mathbf{F}_0 - \mathbf{F}_u) \rightarrow \min, \quad (38)$$

где

$$\mathbf{F}_0 = [C]^T \bar{\mathbf{F}}_0 = \sum_{k=1}^s [C_k]^T [A_k] [D_k]^{-1} \Theta_{0k},$$

$$\mathbf{F}_u = \sum_{k=1}^s [C_k]^T [k_k] [C_{0k}] \mathbf{u}_0.$$

Система (34) является уравнениями Эйлера для следующего функционала Рейсснера:

$$\Pi_{R1} = \frac{1}{2} \mathbf{P}_p^T [f] \mathbf{P}_p + \mathbf{P}_p^T [f] \mathbf{F}_{0p} - \mathbf{P}_p^T [B_0]^T \mathbf{u}_0 + \mathbf{u}^T \{ \mathbf{F} - [B] \mathbf{P}_p \} \rightarrow \text{стац.} \quad (39)$$

Поэтому математическая модель (34) эквивалентна задаче стационарности (39), а также паре двойственных вариационных задач:

а) статическая постановка —

$$\frac{1}{2} \mathbf{P}_p^T [f] \mathbf{P}_p + \mathbf{P}_p^T [f] \mathbf{F}_{0p} - \mathbf{P}_p^T [B_0]^T \mathbf{u}_0 \rightarrow \min$$

при условиях

(40)

$$[B] \mathbf{P}_p = \mathbf{F},$$

б) кинематическая постановка –

$$\frac{1}{2} \mathbf{P}_p^T [f] \mathbf{P}_p - \mathbf{u}^T \mathbf{F} \rightarrow \min$$

при условиях

(41)

$$[f] \mathbf{P}_p - [B]^T \mathbf{u} = [B_0]^T \mathbf{u}_0 - [f] \mathbf{F}_{0p}.$$

После исключения сил \mathbf{P}_p задача (41) также преобразуется в задачу безусловной минимизации (38).

5. Алгоритмы решения

Для построения алгоритмов решения могут использоваться как прямые, так и вариационные постановки задачи. Путем исключения усилий или перемещений и базисных усилий их можно свести к уравнениями метода сил или метода перемещений. Обычно в методе конечных элементов эти уравнения получаются как условия минимума дополнительной или полной потенциальной энергии.

Метод перемещений. Минимум функционала полной потенциальной энергии (38) достигается при

$$[K] \mathbf{u} = \mathbf{F}_\Sigma. \quad (42)$$

Откуда

$$\mathbf{u} = [K]^{-1} \mathbf{F}_\Sigma. \quad (43)$$

Здесь суммарный вектор внешних воздействий

$$\mathbf{F}_\Sigma = \mathbf{F} + \sum_{k=1}^s [C_k]^T [A_k] [D_k]^{-1} \Theta_{0k} - \sum_{k=1}^s [C_k]^T [k_k] [C_{0k}] \mathbf{u}_0 = \mathbf{F} + \mathbf{F}_0 - \mathbf{F}_u. \quad (44)$$

Глобальная матрица жесткости

$$[K] = \sum_{k=1}^s [C_k]^T [k_k] [C_k]. \quad (45)$$

Уравнение перемещений (42) также можно получить исключением вектора усилий

$$S = [D]^{-1} \left\{ [A]^T \mathbf{u} + [A_0]^T \mathbf{u}_0 - \Theta_0 \right\}$$

из математической модели (32) или исключением сил \mathbf{P} и \mathbf{P}_0 из моделей (33) и (34).

В этих случаях матрица жесткости

$$[K] = [A][D]^{-1}[A]^T = [B][f]^{-1}[B]^T = [C][\bar{K}]^{-1}[C]^T = \sum_{k=1}^s [C_k]^T [k_k] [C_k].$$

Усилия с учетом (43) и (44)

$$S = [\alpha]F + \left\{ [\alpha][A][D]^{-1} - [D]^{-1} \right\} \left\{ \Theta_0 - [A_0]^T \mathbf{u}_0 \right\} = [\alpha]F + [\gamma]\Theta_{0\Sigma}, \quad (46)$$

где матрица влияния усилий

$$[\alpha] = [D]^{-1}[A]^T [K]^{-1} \quad (47)$$

и

$$[\gamma] = [\alpha][A][D]^{-1} - [D]^{-1}, \quad \Theta_{0\Sigma} = \Theta_0 - [A_0]^T \mathbf{u}_0.$$

В практических расчетах целесообразно усилия вычислять по элементам, используя формулу

$$S_k = [D_k]^{-1} \left\{ [A_k]^T \mathbf{u}_k - \Theta_{0k} \right\},$$

где векторы \mathbf{u}_k определяются по формуле (25).

Матрицы $[C_k]$ булевы, поэтому для построения глобальной матрицы жесткости можно применять прямой метод жесткостей [1], где операция перемножения матриц заменяется прямым сложением жесткостей. Матрица жесткости $[K]$ симметричная, ленточная. Поэтому достаточно формировать только верхнюю часть ленты системы уравнений (42).

Метод сил. Построим уравнения метода сил для задач (32) и (35). Для этого в начале следует определить частное и общее решения системы уравнений равновесия в виде

$$\mathbf{S} = [B_1]\mathbf{F} + [B_2]\mathbf{S}_2,$$

где

$$[B_1] = [\Gamma] \begin{bmatrix} [A_1]^{-1} \\ [0] \end{bmatrix}, \quad [B_2] = [\Gamma] \begin{bmatrix} -[A_1]^{-1}[A_2] \\ [E] \end{bmatrix}.$$

Здесь $[A_1]$ – базисная матрица, соответствующая базисному вектору \mathbf{S}_1 ; $[\Gamma]$ – матрица связи $\mathbf{S} = [\Gamma]\tilde{\mathbf{S}}$, где $\tilde{\mathbf{S}} = \{\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2\}^T$; $[E]$, $[0]$ – единичная и нулевая матрицы.

Уравнения метода сил можно построить путем исключения векторов \mathbf{S}_1 и \mathbf{u} из задачи (32). Однако проще это сделать исключением вектора \mathbf{S}_1 из вариационной задачи (35). Получается задача безусловной минимизации функционала

$$\Pi_{k1} = \frac{1}{2} \{ [B_1]\mathbf{F} + [B_2]\mathbf{S}_2 \}^T [D] \{ [B_1]\mathbf{F} + [B_2]\mathbf{S}_2 \} + \{ [B_1]\mathbf{F} + [B_2]\mathbf{S}_2 \}^T \{ \Theta_0 - [A_0]^T \mathbf{u}_0 \},$$

условием минимума которого и является уравнение метода сил

$$[\Phi_2]\mathbf{S}_2 + [\Phi_1]\mathbf{F} + [B_2]^T (\Theta_0 - [A_0]^T \mathbf{u}_0) = \mathbf{0},$$

где

$$[\Phi_1] = [B_2]^T [D][B_1], \quad [\Phi_2] = [B_2]^T [D][B_2].$$

Тогда

$$\mathbf{S}_2 = -[\Phi_2]^{-1} \{ [\Phi_1]\mathbf{F} + [B_2]^T (\Theta_0 - [A_0]^T \mathbf{u}_0) \}, \quad (48)$$

$$\mathbf{S} = [\alpha_1]\mathbf{F} - [B_2][\Phi_2]^{-1}[B_2]^T (\Theta_0 - [A_0]^T \mathbf{u}_0) \quad (49)$$

или

$$\mathbf{S} = [\alpha_1]\mathbf{F}_\Sigma + [\gamma_1]\Theta_{0\Sigma} = [\alpha_1]\mathbf{F}_\Sigma - [B_1](\mathbf{F}_0 - \mathbf{F}_u). \quad (50)$$

Здесь учтены определения (44), зависимости

$$\Theta_0 = [D][B_1]\mathbf{F}_0, \quad [A_0]^T \mathbf{u}_0 = [D][B_1]\mathbf{F}_u \quad (51)$$

и обозначение матрицы влияния усилий

$$[\alpha_1] = [B_1] - [B_2][\Phi_2]^{-1}[\Phi_1]. \quad (52)$$

Нетрудно доказать равенство $[\alpha] = [\alpha_1]$. Выражение (46) с учетом зависимостей (51) и $[A][B_1] = [E]$ можно преобразовать к виду

$$\mathbf{S} = [\alpha]\mathbf{F}_\Sigma - [B_1](\mathbf{F}_0 - \mathbf{F}_u). \quad (53)$$

Так как левые стороны уравнений (49) и (53) равны, то

$$[\alpha] = [D]^{-1}[A]^T[K]^{-1} = [B_1] - [B_2][\Phi_2]^{-1}[\Phi_1] = [\alpha_1].$$

А поэтому и

$$[\gamma_1] = -[B_2][\Phi_2]^{-1}[B_2]^T = [\gamma].$$

Перемещения определяются из геометрических уравнений системы (32). Умножая их слева на $[B_1]^T$ и учитывая зависимости (44), (51), получаем уравнение податливости

$$\mathbf{u} = [\Phi]\mathbf{F}_\Sigma, \quad (54)$$

в котором глобальная матрица податливости

$$[\Phi] = [B_1]^T[D][\alpha_1] = [B_1]^T[D][B_1] - [\Phi_1]^T[\Phi_2]^{-1}[\Phi_1]. \quad (55)$$

Однако $[\alpha] = [\alpha_1]$ и тогда с учетом (47)

$$[\Phi] = [K]^{-1}.$$

Второй член в выражениях матрицы влияния усилий (52) и матрицы влияния перемещений (55) учитывает влияние лишних связей статически неопределимой конструкции. В практических расчетах произведение квазидиагональной матрицы с другими матрицами целесообразно заменить суммой произведений по конечным элементам. Например,

$$[B_1]^T[D][B_1] = \sum_{k=1}^s [B_{1k}]^T [D_k][B_{1k}], \quad [C]^T[\bar{A}]\mathbf{s} = \sum_{k=1}^s [C_k]^T [A_k]\mathbf{s}_k.$$

Таким же способом можно построить алгоритм метода сил и для задачи (34). Ниже приводятся лишь основные формулы этого алгоритма

$$\mathbf{S} = [\alpha_2] \mathbf{F}_\Sigma - [\gamma_2] \Theta_{0\Sigma} = [\alpha_2] \mathbf{F}_\Sigma - [\alpha_0] (\mathbf{F}_0 - \mathbf{F}_u), \quad \mathbf{u} = [\tilde{\Phi}] \mathbf{F}_\Sigma.$$

Здесь матрицы

$$\begin{aligned} [\alpha_0] &= [\bar{A}_p]^{-1} [L_1] = [B_1], & [\alpha_2] &= [\bar{A}_p]^{-1} \{ [L_1] - [L_2] [\Phi_4]^{-1} [\Phi_3] \} = [\alpha], \\ [\gamma_2] &= -[\bar{A}_p]^{-1} [L_2] [\Phi_4]^{-1} [L_2]^T = [\gamma], & [\tilde{\Phi}] &= [L_1]^T [f] [L_1] - [\Phi_3]^T [\Phi_4]^{-1} [\Phi_3] = [\Phi], \end{aligned}$$

где

$$[\Phi_3] = [L_2]^T [f] [L_1] = [\Phi_1], \quad [\Phi_4] = [L_2]^T [f] [L_2] = [\Phi_2];$$

$[L_1]$, $[L_2]$ - матрицы общего и частного решений уравнений равновесия (28); $[\bar{A}_p]^{-1}$ - квазидиагональная матрица, диагональными блоками которой являются матрицы $[\bar{A}_{pk}]^{-1}$. Решения уравнений равновесия (27) и (28) связаны зависимостями

$$[B_1] = [\bar{A}_p]^{-1} [L_1], \quad [B_2] = [\bar{A}_p]^{-1} [L_2], \quad [L_1] = [\bar{A}_p] [B_1], \quad [L_2] = [\bar{A}_p] [B_2].$$

Таким образом, матрицы $[\bar{A}_p]$ и $[\bar{A}_p]^{-1}$ являются матрицами преобразования зависимостей одного алгоритма метода сил в зависимости другого алгоритма.

Итак, построены двойственные алгоритмы решения уравнений равновесных конечных элементов. Так как основными неизвестными в методе сил являются внутренние силы, а в задачах (32) и (34) они различны, то и алгоритм метода сил для них имеет некоторые различия, не касающиеся содержания самого алгоритма. Для наглядности приводятся двойственные пары векторов и зависимостей:

для элемента	для конструкции
$\Theta_k - \mathbf{S}_k$	$\Theta - \mathbf{S}$
$\mathbf{u}_k - \mathbf{P}_k$	$\mathbf{u} - \mathbf{P}$
$\mathbf{u}_{pk} - \mathbf{P}_{pk}$	$\mathbf{u}_p - \mathbf{P}_p$
$[D_k] - [\tilde{K}_k] = [D_k]^{-1}$	$[D] - [\tilde{K}] = [D]^{-1}$
$[f_k] - [k_k]$	$[\Phi] - [K]$
$\Theta_k = [A_k]^T \mathbf{u}_k - \mathbf{P}_k = [A_k] \mathbf{S}_k$	$\Theta = [A]^T \mathbf{u} - \mathbf{F} = [A] \mathbf{S}$
$\mathbf{u}_{pk} = [f_k] (\mathbf{P}_{pk} + \mathbf{F}_{0k}) - \mathbf{P}_k = [k_k] \mathbf{u}_k - \mathbf{F}_{0k}$	$\mathbf{u} = [\Phi] \mathbf{F}_\Sigma - \mathbf{F}_\Sigma = [K] \mathbf{u}$
$\mathbf{u}_{pk} = [B_k]^T \mathbf{u}_k - \mathbf{P}_{pk} = [B_k] \mathbf{P}_{pk}$	$\mathbf{u}_p = [B]^T \mathbf{u} - \mathbf{F} = [B] \mathbf{P}_p$
	$\bar{\mathbf{u}} = [C] \mathbf{u} + [C_0] \mathbf{u}_0 - \mathbf{F} = [C]^T \mathbf{P}$

5. Построение равновесного элемента пластинки

В качестве иллюстративного примера рассматривается построение треугольного конечного элемента тонкой изгибаемой пластинки. Так как усилия $\mathbf{S}(\mathbf{x}) \equiv \mathbf{M}(\mathbf{x}) = \{M_{11}(\mathbf{x}), M_{22}(\mathbf{x}), M_{12}(\mathbf{x})\}^T$ распределяются по криволинейному закону, то с целью более точной их аппроксимации выбирается элемент второго порядка (рис. 1).

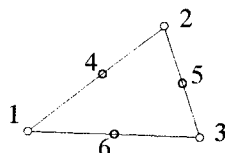


Рис. 1. Конечный элемент

Элемент рассматривается в системе треугольных координат L_1, L_2, L_3 [1]. Усилия в элементе аппроксимируются квадратичным полиномом

$$\mathbf{S}_k(\mathbf{L}) = \sum_{i=1}^6 H_{ki}(\mathbf{L}) \mathbf{S}_{ki} = [\mathbf{H}_k(\mathbf{L})] \mathbf{S}_k, \quad (56)$$

где $\mathbf{S}_{ki} = \{M_{11,ki}, M_{22,ki}, M_{12,ki}\}^T$; $\mathbf{S}_k = \{\mathbf{M}_{k1}, \mathbf{M}_{k4}, \mathbf{M}_{k2}, \mathbf{M}_{k5}, \mathbf{M}_{k3}, \mathbf{M}_{k6}\}^T$.

Функции формы $H_{ki}(\mathbf{L}) = 2L_i^2 - L_i$ для узлов $i = 1, 2, 3$ и $H_{k4}(\mathbf{L}) = 4L_1L_2$, $H_{k5}(\mathbf{L}) = 4L_2L_3$, $H_{k6}(\mathbf{L}) = 4L_1L_3$. Кроме функций (56), в работе [6] задаются еще аппроксимирующие функции деформаций.

Функция (56) не удовлетворяет уравнению равновесия пластинки (2), поэтому, кроме узловых степеней свободы \mathbf{u}_{sk} , вводится степень свободы u_{1k} , отвечающая этому уравнению. Векторы обобщенных сил $\mathbf{P}_k = \{P_{1k}, \mathbf{P}_{sk}\}$ и перемещений $\mathbf{u}_k = \{u_{1k}, \mathbf{u}_{sk}\}^T$. Вектор $\mathbf{P}_{sk} = \{\mathbf{M}_{nk}, \mathbf{V}_{nk}, \mathbf{Q}_k\}^T$. Обобщенная сила P_{1k} определяется уравнением равновесия

$$P_{1k} = \int [H_k(\mathbf{L})] \mathbf{S}_k = [A_{1k}] \mathbf{S}_k. \quad (57)$$

Девятимерный вектор \mathbf{M}_{nk} состоит из нормальных узловых изгибающих моментов (для каждой грани по 3):

$$M_n = M_{11}n_1^2 + M_{22}n_2^2 + 2M_{12}n_1n_2, \quad (58)$$

где n_1, n_2 – направляющие косинусы внешней нормали грани элемента. Составляющими шестимерного вектора V_{nk} являются нормальные к граням обобщенные поперечные силы

$$V_n = \frac{\partial M_n}{\partial x_1} n_1 + \frac{\partial M_n}{\partial x_2} n_2 - 2 \frac{\partial M_{nt}}{\partial x_1} n_1 + 2 \frac{\partial M_{nt}}{\partial x_2} n_1 \quad (59)$$

угловых узлов элемента. Здесь

$$M_{nt} = (M_{22} - M_{11})n_1 n_2 + M_{12}(n_1^2 - n_2^2). \quad (60)$$

Составляющими трехмерного вектора Q_k являются вертикальные силы

$$Q_i = M_{nt,i}^- - M_{nt,i}^+, \quad (61)$$

приложенные в углах элемента. $M_{nt,i}^-, M_{nt,i}^+$ – крутящие моменты i -го узла, относящиеся к двум сходящимся в этом узле граням.

Число степеней свободы элемента $m_k = 19$. Если в качестве обобщенных сил P_{sk} принять сосредоточенные силы, то

$$M_{n,ti} = \int_{L_t} H_{ti}(\mathbf{L}) M_{n,t}(\mathbf{L}) dl, \quad V_{n,ti} = \int_{L_t} L_{ti}(\mathbf{L}) V_{n,t}(\mathbf{L}) dl,$$

где L_t – длина грани t элемента.

Матрица податливости

$$[D_k] = \frac{A_k}{180} \times$$

6[d]		-[d]	-4[d]	-[d]	
	32[d]		16[d]	-4[d]	16[d]
		6[d]		-[d]	-4[d]
			32[d]		16[d]
				6[d]	
					32[d]

симметрично

Здесь

$$[d] = \frac{1}{\kappa (1-\nu^2)} \begin{vmatrix} 1 & -\nu & 0 \\ -\nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{vmatrix}, \quad \kappa = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)},$$

где E, ν – модуль упругости и коэффициент Пуассона материала; t – толщина элемента.

Формулы (57)–(61) используются для формирования матрицы $[A_k]$ уравнений равновесия элемента. Матрица жесткости каждого элемента строится численным способом с использованием формулы (14).

6. Численные результаты

Эффективность исследуемого элемента и метода РКЭ иллюстрируется результатами расчета квадратных свободно опертой, жестко закрепленной и только в углах опертой (УО), а также прямоугольной шарнирно–жестко опертой (рис. 2,в) пластинок, подверженных действию равномерно распределенной нагрузки интенсивности p и сосредоточенной в центре силы F . Коэффициент Пуассона материала $\nu = 0,3$. Все иллюстративные примеры выбраны с таким расчетом, чтобы иметь возможность сравнить численные результаты с аналитическими решениями или с результатами других авторов. Исследования выполнены для расчетных схем разной густоты, примеры которых показаны на рис. 2.

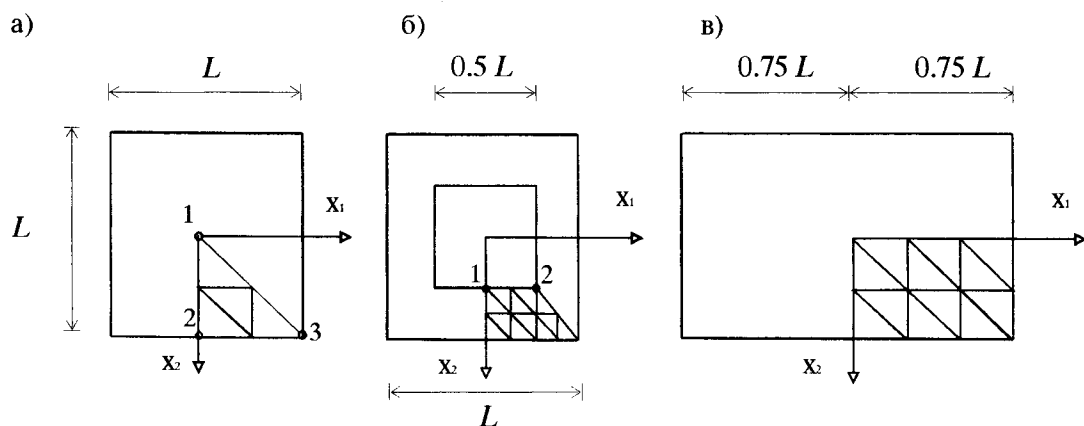


Рис. 2. Примеры расчетных схем пластинок

В табл. 1 приведены погрешности (в процентах) численных решений по сравнению с аналитическими [7] для прогиба центральной точки и характерных усилий сплошных квадратных пластинок. В табл. 2 представлены характерные результаты расчета прямоугольной пластинки. Значения изгибающих моментов приведены до множителей pL^2 и F , а прогибов – до множителей pL^4/κ и FL^2/κ . Результаты расчета практически совпадают с аналитическим решением уже при разбивке октанта квадратной пластинки на 4 элемента и квадранта

Табл. 1. Погрешности прогибов и усилий

Пластика	Нагрузка	Усилия				Прогиб		
		M	Число элементов			Число элементов		
			1	4	16	1	4	16
Свободно опертая	p	$M_{11,1}$	+4	0	0	-0.2	0	0
	F	$M_{12,3}$	+17	+0.6	0	+4.8	+1	+0.2
Жестко за- щемленная	p	$M_{22,2}$	+13	+1.8	+0.2	+1.6	+0.8	0
	F	$M_{22,2}$	+8	+2.8	+0.5	+9.3	+2.5	+0.3
УО	p	$M_{11,2}$	-5.9	+0.7	+0.7	-0.7	-0.4	-0.4

Табл. 2. Результаты расчета прямоугольной пластинки

Нагрузка	Число элементов	В центре пластинки			В середине края	
		Прогиб	M_{11}	M_{22}	M_{11}	M_{22}
p	8	0.00247	0.0178	0.0409	-0.0247	-0.0824
	12	0.00247	0.0178	0.0407	-0.0247	-0.0823
	32	0.00247	0.0178	0.0406	-0.0247	-0.0822
	Аналит.	0.00247	0.0179	0.0406		-0.0822
F	8	0.00747	0.2431	0.2876	-0.0520	-0.1741
	12	0.00740	0.2739	0.3040	-0.0511	-0.1713
	32	0.00733	0.3158	0.3586	-0.0510	-0.1700

прямоугольной прямоугольной пластинки на 8 элементов. В табл. 3 приведены значения прогибов (до множителя pL^4/κ) двух точек квадратной шарнирно опертой пластинки с отверстием (рис. 2,б) от равномерно распределенной нагрузки p , полученные с применением исследуемого элемента, треугольного равновесного элемента с аппроксимацией усилий функциями Саусвелла [3] и прямоугольного несовместного элемента [8]. Здесь представлены нижний и верхний пределы прогиба, полученные в работе [3] интегрированием вдоль четырех сечений пластинки разных направлений.

Стабильные (не меняющиеся при сгущении расчетной сетки) результаты получены лишь для исследуемого элемента. Результаты работ [3, 8] при сгущении расчетной сетки приближаются к ним.

Табл. 3. Значения прогиба пластинки с отверстием

Число элементов	Исследуемый элемент		Равновесный элемент [3]		Несовместный элемент [8]	
	Точка 1	Точка 2	Точка 1	Точка 2	Точка 1	Точка 2
3	0.00322	0.00234				
12	0.00320	0.00232	0.00285 0.00329	0.00196 0.00232	0.00314	0.00222
27	0.00320	0.00231	0.00295 0.00324	0.00203 0.00232	0.00316	0.00226

7. Заключение

Представлены двойственные зависимости, выражения матрицы жесткости и матрицы податливости равновесных конечных элементов, а также разные постановки (прямые и вариационные) задачи анализа НДС упругих конструкций методом РКЭ и двойственные пары алгоритмов решения задачи при разных видах нагружения. Алгоритм метода перемещений проще, так как для формирования разрешающих уравнений можно применить прямой метод жесткостей, а для построения уравнений метода сил необходимо предварительно решить систему уравнений равновесия. Приведены три алгоритма построения матриц влияния усилий и перемещений. Показано, что процедуру формирования и решения уравнений метода перемещений можно заменить прямым формированием глобальной матрицы податливости. В тех случаях, когда степень статической неопределенности дискретной модели конструкции значительно меньше общего числа степеней свободы, такая замена будет эффективной. Представленные зависимости позволяют матрицу жесткости конечного элемента преобразовать в матрицу податливости и наоборот. Начальные деформации и перемещения заменяются эквивалентными внешними силами. Таким образом, разработана единая методика расчета упругих конструкций методом равновесных конечных элементов при разных внешних воздействиях.

Экспериментальные расчеты иллюстрируют высокую точность построенного равновесного элемента пластинки. Его точность превышает точность большинства других геометрически совместных и несовместных, гибридных и равновесных элементов [1, 9]. Представленное выражение матрицы жесткости предоставляет возможность включить РКЭ в библиотеки и программы совместных конечных

элементов и провести двухсторонний анализ конструкций, а также определить статически возможные распределения усилий, необходимые при упругопластическом анализе конструкций.

Литература

1. Р. Галлагер. Метод конечных элементов. Основы. Москва: Мир, 1984, 428 с.
2. De Veubeke B.F. and Sander G. An equilibrium model for plate bending//Int. J.Solids and Struct., 1968, vol.4, p. 447–460.
3. L.S.D. Morley. The triangular equilibrium element in the solution of plate bending problem//The Aeronautical Quarterly, May 1968, vol.19, p. 149–169.
4. S. Kalanta. Tiesioginiai pusiausvirųjų baigtinių elementų metodo algoritmai//Lietuvos skaičiuojamosios mechanikos III seminaro darbai. Vilnius, 1994, p. 75-81.
5. С. Каланта. Теория и алгоритмы метода равновесных конечных элементов. Вильнюс, 1992. 13 с. Деп. в ЛитИИ 28.05.92, No.2670 – Li.
6. В. Камайтис, А. Чижас. Метод равновесных конечных элементов в задачах строительной механики// Литовский механический сборник, 1973, No.1 (12), Вильнюс, с. 105–114.
7. С. Тимошенко, С. Войновский–Кригер. Пластинки и оболочки. Москва: Физматгиз, 1966, 636 с.
8. D.J. Dawe. On assumed displacements for the rectangular plate bending element// J. of the Royal. Aero. Soc., October 1967, vol.71, p. 722.
9. S. Kalanta. On variant of finite element method in elasticity theory// International Applied Mechanics. New York, 1994, vol.30, No.2, p. 148–152.

THE EQUILIBRIUM FINITE ELEMENTS IN COMPUTATION OF ELASTIC STRUCTURES

S.Kalanta

S u m m a r y

A problem of elastic structures stress–strain field determination is considered in this article. A theoretical background and computation algorithms of equilibrium finite element method are presented there. The different external effects are estimated, namely: load, prestressing, initial strains and support settlements. The dual relationships (equilibrium and geometrical equations, stiffness and flexibility equations) of equilibrium element, also the expressions of stiffness and flexibility matrices

are given. These relationships describe the stress–strain field of the finite element and allow to transform the flexibility matrix to the stiffness matrix and on the contrary. There are presented direct and variational formulations of the problem. The algorithms of the forces method and displacements method are made for their solution. Easier is the algorithm of displacements method, because making equations of the forces method needs to solve the system of equilibrium equations. But the formulation and solving of the displacements equations can be changed by direct formulation of global flexibility matrix of the structure. In these cases, when the degree of static indeterminacy of the discrete model of structure is quite less than the number of freedom degrees, such the change can be effective.

The computational results illustrate the high accuracy of equilibrium elements not only with respect to forces, but also to displacements. The direct stiffness method in equilibrium elements makes it possible not only to simplify significantly implementation of the equilibrium element method, but also to include equilibrium elements in libraries of geometrically compatible elements.